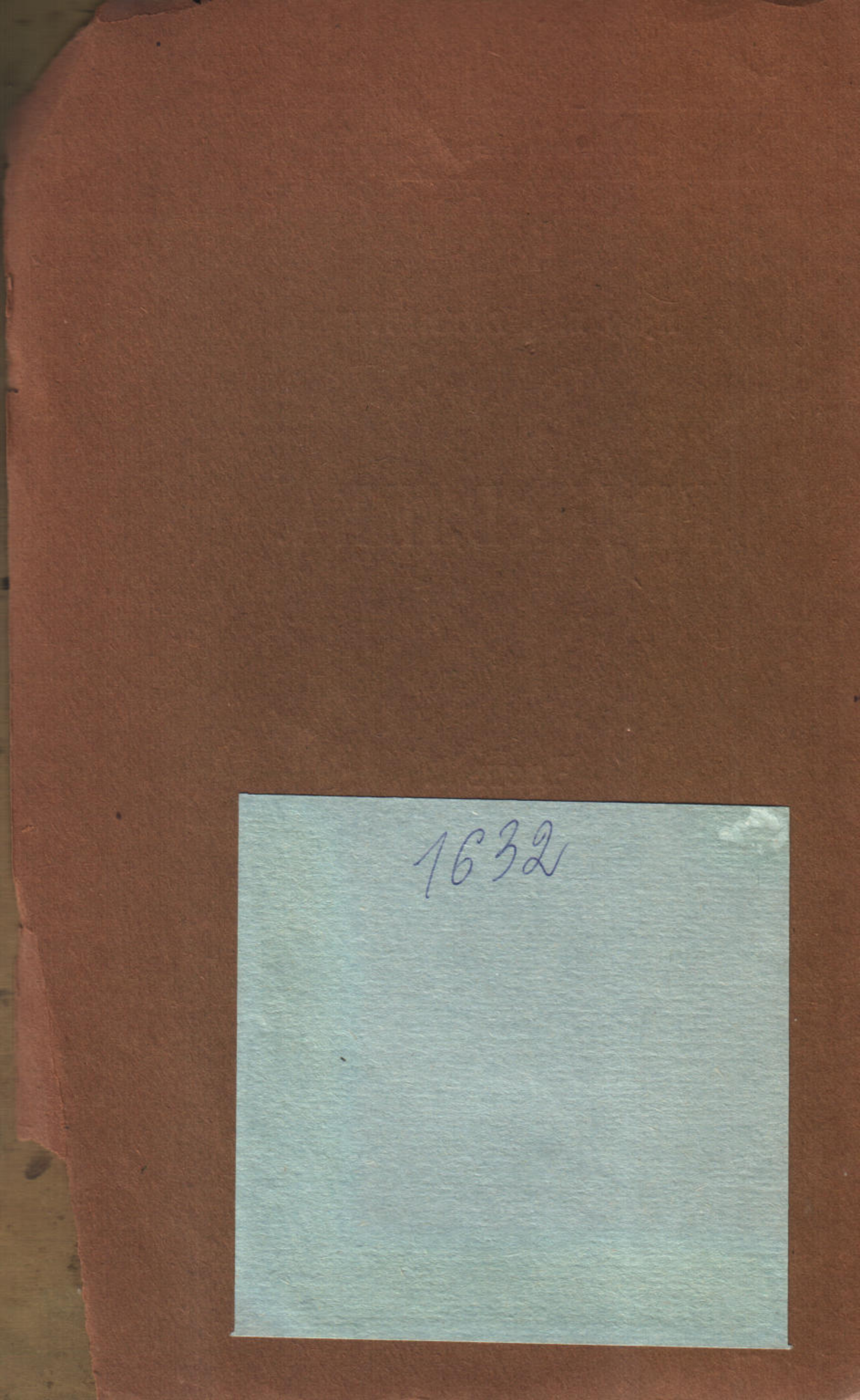
Изданіе Кассы Взаимопомощи Студентовъ СПБ. Политехническаго Института
Императора Петра Великаго.

Проф. Б. А. БАХМЕТЕВЪ.

ГИДРАВЛИКА.

Часть I.

С.-Петербургъ.
Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.
1913.


1632

Изданіе Кассы Взаимопомощи Студентовъ СПБ. Политехническаго Института
Императора Петра Великаго.

Б. А. БАХМЕТЕВЪ.

ГИДРАВЛИКА.

(Общій курсъ).

Пособіе для студ. Инж. Строит. Отд. СПБ. Политехн. Института Императора Петра Великаго.

I часть
(ОБЩАЯ).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1913.

О г л а в л е н і е.

Страница.

Предисловіе.

Настоящее пособіе охватываетъ примѣрно содержаніе лекцій по общему курсу гидравлики, читаемому мною на Инженерно-Строительномъ отдѣленіи СПБ.Политехническаго Института.

Настоящая первая (общая) часть заключаетъ въ себѣ, кромѣ элементовъ гидростатики, общее разсмотрѣніе вопросовъ о движеніи жидкости.

Мнѣ казалось цѣлесообразнымъ въ пособіи отступить отъ порядка лекціоннаго изложенія предмета и выдѣлить цѣликомъ въ отдѣльную часть изложеніе тѣхъ свѣдѣній и представленій, которыя мы имѣемъ въ настоящее время, о "механизмѣ" движенія вязкой жидкости, а также общее разсмотрѣніе и оцѣнку гидравлическихъ моделей и методовъ. Намъ представляется, что такимъ путемъ всего лучше достигается правильное пониманіе относительно цѣнности и предѣловъ примѣнимости орудій, которыя прикладная механика даетъ въ руки практика-инженера.

Вторая (спеціальная) часть будетъ посвящена подробному разсмотрѣнію частныхъ случаевъ движенія жидкости (отверстія, водосливы, трубы, каналы и пр.).

В.В.

О Б Щ Е Е.

1. *Гидравлика* является отдѣломъ прикладной механики, занимающимся изученіемъ движенія и покоя жидкостей. Жидкимъ называется состояніе вещества, характеризующееся почти неограниченной подвижностью частицъ и почти полнымъ отсутствіемъ сопротивленія разрыву или измѣненію формы тѣла.

Необходимо различать состоянія: a) Капельно-жидкое и b) Газообразное.

Капельно-жидкимъ называется состояніе, отличающееся почти полной несжимаемостью (а слѣдовательно, значительной объемной упругостью) тѣла и весьма малой температурной его расширяемостью; тѣмъ самымъ *плотность капельно жидкаго тѣла остается почти неизмѣнной* (постоянной), не завися отъ давленія и температуры.

Наоборотъ, газообразное состояніе характеризуется весьма значительной сжимаемостью и сравнительно большимъ коэффиціентомъ температурнаго расширенія. Плотность газа тѣмъ самымъ измѣняется въ широкихъ предѣлахъ, вмѣстѣ съ давленіемъ и температурой.

Въ послѣдующемъ мы будемъ имѣть въ виду лишь капельно - жидкія тѣла, или *жидкости* въ болѣе тѣсномъ смыслѣ слова.

Наши выводы могутъ быть распространяемы на газы только въ тѣхъ случаяхъ, когда, въ предѣлахъ разсматриваемаго явленія, измѣненія температуры и давленія столь незначительны, что ими можно пренебрегать и считать, опять таки въ предѣлахъ разсматриваемаго явленія, плотность газа постоянной.

Гидравлика, въ болѣе тѣсномъ смыслѣ слова, занимается разсмотрѣніемъ вопросовъ движенія и покоя именно капельно-жидкихъ тѣлъ.

Изученіе обстоятельствъ движенія и покоя газовъ входитъ въ составъ термодинамики.

2. *Идеальная жидкость*.

При разсмотрѣніи различныхъ вопросовъ, касающихся покоя и движенія жидкостей, весьма важное значеніе имѣетъ понятіе

объ "идеальной жидкости" или объ "идеально-жидкомъ тѣлѣ".

Эта "модель" играетъ въ гидромеханикѣ такую же роль, какую въ статикѣ и динамикѣ играетъ модель абсолютно твердаго тѣла или модель идеально упругаго тѣла въ теоріи упругости.

1) Мы будемъ считать идеальную жидкость абсолютно несжимаемой и нерасширяющейся отъ температуры. Такимъ образомъ, плотность идеальной жидкости постоянна; упругость ея безконечно велика; коэффиціентъ температурнаго расширенія - нуль.

2) Идеальная жидкость абсолютно подвижна; она не оказываетъ никакого сопротивленія разрыву или измѣненію формы.

Изъ послѣдняго опредѣленія само собой слѣдуетъ, что внутри идеальной жидкости не могутъ существовать *ни растягивающія, ни касательныя* напряженія. Очевидно, что сила взаимодѣйствія, которая единственно можетъ существовать внутри идеальной жидкости по нѣкоторой площадкѣ, должна быть направлена по нормали къ этой площадкѣ внутрь; такимъ образомъ, единственныя напряженія, которыя могутъ существовать въ идеально-жидкомъ тѣлѣ суть напряженія сжимающія.

3. *Реальныя жидкости.*

Посмотримъ, насколько "модель идеальной жидкости" отличается отъ свойствъ реальной жидкости.

Сжимаемость: Въ нижеслѣдующей таблицѣ I *) приведены (по Amagat) коэффиціенты объемной сжимаемости β (умноженные на 10^6) для воды и алкоголя при обыкновенныхъ температурахъ. Коэффиціентомъ объемной сжимаемости называется коэффиціентъ β опредѣляемый изъ формулы

$$\frac{dv}{v} = -\beta dp$$

и выражающій относительное измѣненіе объема жидкости при увеличеніи давленія на одну атмосферу.

Таблица I.

Давленіе въ атмосф.	1-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
Вода	47,5	41,6	35,8	32,4	29,2	26,1
Алкоголь	76,9	56,6	45,8	38,5	33,1	28,4

---

*) *Всѣ данныя заимствованы изъ "Физики" Хвольсона.*

Такимъ образомъ для воды при обыкновенной температурѣ коэффиціентъ объемнаго сжатія 0,0000475 или $\backsim$ 1/21000.

Что касается измѣненія сжимаемости съ температурой, то согласно опытамъ Amagat сжимаемость при малыхъ давленіяхъ сперва уменьшается съ возрастаніемъ температуры до 50°, далѣе нѣсколько увеличивается.

Температурное расширеніе.

Коэффиціенты температурнаго расширенія ($\frac{dv}{v} = \alpha dt$) для воды по Amagat при различныхъ температурахъ и давленіяхъ приведены въ таблицѣ II. (Въ таблицѣ приведены значенія α умноженныя на 10^6).

Таблица II.

Давленія	*Температуры*				
	0 - 10	10 - 20	40 - 50	60 - 70	90 - 100
1	14	150	422	556	719
100	43	165	422	548	
200	72	183	426	539	
500	149	236	429	523	661
900	229	289	437	514	621

Какъ видно изъ таблицы коэффиціентъ температурнаго расширенія для воды увеличивается съ увеличеніемъ давленія. Для большинства жидкостей наоборотъ, коэффиціентъ α съ увеличеніемъ давленія уменьшается. Температура наибольшей плотности воды понижается съ увеличеніемъ давленія. При нормальномъ (атмосферномъ) давленіи температура наибольшей плотности 4° С; при p = 41.6 atm., t = 3.3°; при p = 93.3 atm., t = 2°; при p = 144.9 atm., t = 0,6°.

Плотность.

Измѣненіе плотности воды при атмосферномъ давленіи въ зависимости отъ температуры. Таблица III.

t	*Плотность*	t	*Плотность*	t	*Плотность*	t	*Плотность*
0	0.999874	20	0.998235	50	0.99813	80	0.97191
4	1.000000	30	0.995674	60	0.98331	90	0.96550
10	0.999731	40	0.99233	70	0.97780	99	0.95934
						100	0.95863

Изъ приведенныхъ выше данныхъ слѣдуетъ, что въ предѣлахъ встрѣчающихся въ практикѣ измѣненій температуръ и давленій, плотность реальной жидкости колеблется весьма мало, и что обычно, принимая эту плотность постоянной, мы дѣлаемъ весьма малую ошибку, ошибку относительно значительно меньшую, чѣмъ обычная точность гидравлическихъ вычисленій.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ намъ придется считаться какъ съ упругостью, такъ и съ температурной расширяемостью жидкостей. Для рѣшенія соотвѣтственныхъ вопросовъ можно пользоваться данными приведенныхъ выше таблицъ.

Силы, дѣйствующія внутри жидкости.

Въ идеальной жидкости мы допустили существованіе лишь сжимающихъ напряженій. На самомъ дѣлѣ въ реальной жидкости имѣютъ мѣсто какъ растягивающія, такъ и касательныя напряженія.

Растягивающія усилія появляются въ видѣ силъ сцѣпленія, являющихся результатомъ молекулярнаго притяженія между частицами.

Вопросы о проявленіяхъ этихъ силъ разсматриваются обычно въ курсахъ физики въ отдѣлѣ о частичныхъ силахъ. (Теорія капиллярности).

Извѣстно, что эти силы проявляются лишь на границахъ однородныхъ жидкихъ массъ (на поверхностяхъ соприкосновенія разнородныхъ жидкостей или жидкости съ твердымъ тѣломъ). Внутри же жидкости конечныхъ размѣровъ дѣйствіе силъ сцѣпленія сводится къ нулю.

Такимъ образомъ капиллярныя силы приходится принимать во вниманіе лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда объемные размѣры разсматриваемаго жидкаго тѣла малы по сравненію съ его поверхностью, какъ напр., при движеніи въ капиллярныхъ трубкахъ и пр. Въ обычныхъ же случаяхъ ими вовсе можно пренебрегать.

Касательныя напряженія.

Наоборотъ, касательныя напряженія, проявляющіяся внутри жидкости достигаютъ значительной величины и пренебрегать ими во многихъ случаяхъ отнюдь нельзя. Касательныя усилія проявляются между частицами жидкости при скольженіи одной по другой; такимъ образомъ ихъ дѣйствіе подобно тренію; усилія эти потому и называются "внутреннимъ треніемъ"; свой-

ство реальной жидкости обладать таковымъ называютъ "вязкостью"; реальную жидкость поэтому, въ противоположность идеальной, называютъ "вязкой" жидкостью. При движенiи реальной жидкости силы вязкости совершаютъ необратимую работу; движенiе реальной жидкости сопровождается въ силу этого, вообще говоря, разсѣянiемъ энергiи. Какъ мы увидимъ ниже, цѣлые отдѣлы гидравлики посвящены исключительно количественной оцѣнкѣ работы силъ сопротивленiя. Немудрено поэтому, что изученiе внутренняго тренiя составляетъ одну изъ самыхъ главныхъ задачъ гидравлики.

Согласно опыту, силы внутренняго тренiя зависятъ отъ *скорости скольженiя* частицъ между собой. Изъ этого слѣдуетъ крайне важное обстоятельство, именно то, что при покоѣ жидкости, когда скорости скольженiя равны нулю, *силы внутренняго тренiя отсутствуютъ*.

4. Гидродинамика и Гидравлика.

Отдѣлъ теоретической механики, занимающiйся изученiемъ движенiя жидкихъ тѣлъ, называется "гидродинамикой". Гидродинамика преимущественно занимается разсмотрѣнiемъ движенiя идеально жидкихъ тѣлъ.

Общiя уравненiя движенiя даже для случая идеальной жидкости не могутъ быть проинтегрированы въ общемъ видѣ. Тѣмъ не менѣе въ рядѣ частныхъ случаевъ они интегрируются и даютъ крайне важныя обобщенiя, которыя, какъ мы увидимъ ниже, въ нѣкоторыхъ случаяхъ примѣнимы и къ движенiю реальныхъ жидкостей.

Уравненiя движенiя для вязкихъ жидкостей представляются еще болѣе сложными и могутъ быть проинтегрированы лишь въ самомъ небольшомъ числѣ частныхъ случаевъ.

Гидравлика, какъ и другiе отдѣлы прикладной механики, въ основѣ своей опирается на физику, понимая послѣднюю въ самомъ широкомъ смыслѣ, включая физику какъ опытную, такъ и математическую (основой которой является теоретическая механика).

Въ этомъ смыслѣ въ основѣ гидравлики лежитъ гидродинамика. Но такъ какъ послѣдняя не можетъ дать отвѣта на всѣ вопросы движенiя вязкой жидкости, то гидравликѣ, какъ и другимъ отдѣламъ прикладной механики, приходится изыскивать свои собственные методы, помощью которыхъ можно было бы рѣшать, хотя

бы и неполно и несовершенно, вопросы движенія жидкостей и давать отвѣты на вопросы, предъявляемые инженерной практикой.

Прогрессъ гидравлики, равно какъ и другихъ отдѣловъ прикладного знанія, заключается въ постепенной замѣнѣ такихъ временныхъ, приблизительныхъ рѣшеній рѣшеніями болѣе точными, основанными непосредственно на методахъ математической физики.

Глава I.

ГИДРОСТАТИКА.

Отдѣлъ гидравлики, занимающійся изученіемъ равновѣсія и покоя жидкости, называется *гидростатикой*.

Какъ мы видѣли выше, въ случаяхъ покоя жидкости силы вязкости отсутствуютъ. Слѣдовательно, находящаяся въ равновѣсіи масса реальной жидкости конечныхъ размѣровъ (чтобы можно было пренебрегать явленіями капиллярности), находится въ условіяхъ, совершенно близкихъ къ идеальной жидкости. Тѣмъ самымъ задачи равновѣсія жидкостей могутъ быть рѣшаемы съ большой точностью.

Гидравликѣ нѣтъ надобности вырабатывать собственныхъ пріемовъ, поэтому въ этой области различія между гидравликой и гидродинамикой не существуетъ.

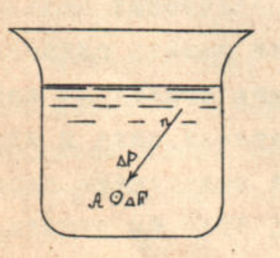
5. *Гидростатическое давленіе.*

Въ силу вышеуказаннаго внутри жидкости, находящейся въ равновѣсіи, существуютъ лишь *сжимающія напряженія*.

Въ точкѣ А, находящейся внутри жидкости, (фиг. 1) представимъ себѣ безконечно малую площадку ΔF. На эту площадку будетъ дѣйствовать сила ΔP по нормали n внутрь. Предѣлъ величины

$$\lim \left| \frac{\Delta P}{\Delta F} \right|_{\Delta F = 0} = p$$

Фиг. 1.



этой силы, отнесенной къ единицѣ площади, при уменьшеніи послѣдней до нуля, назовемъ давленіемъ въ точкѣ А по направленію n. ("Давленіе", очевидно, тождественно съ "сжимающимъ напряженіемъ").

Легко показать, что давленіе въ данной точкѣ не зависитъ отъ направленія, т.е. одинаково для

всѣхъ безконечно малыхъ площадокъ, проведенныхъ въ точкѣ А, какъ бы послѣднія ни были оріентированы.

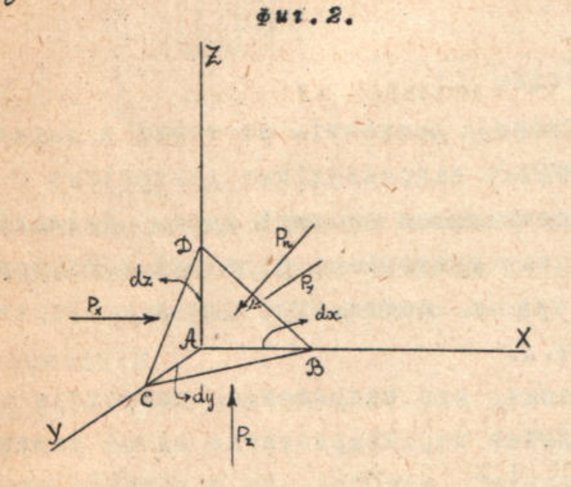
Для доказательства этого достаточно разсмотрѣть равновѣсіе силъ, приложенныхъ къ элементарному тетраэдру $ABCD$, съ безконечно малыми сторонами dx, dy, dz; въ виду малости площадокъ, можно пренебрегать, какъ величиной высшаго порядка малости, измѣненіемъ давленія въ предѣлахъ площадокъ и считать его по всей площадкѣ одинаковымъ.

Такимъ образомъ, величины силъ, дѣйствующихъ на стороны тетраэдра выразятся послѣдовательно черезъ:

$$\frac{1}{2}p_x dydz\ ;\ \frac{1}{2}p_y dxdz\ ;\ \frac{1}{2}p_z dxdy\ ;\ p_n F_n \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

гдѣ p_x, p_y, p_z и p_n изображаютъ давленія въ направленіяхъ x, y, z и n - нормали къ площадѣ BCD, площадь которой равна F_n.

Фиг. 2.



Кромѣ внѣшнихъ силъ - давленій, на массу, находящуюся внутри тетраэдра, дѣйствуютъ еще лишь, такъ называемыя, объемныя силы, *пропорціональныя массѣ* (тяжести, притяженія и т.п.). Ихъ величины по нѣкоторому направленію n выражаются черезъ:

$$\frac{1}{6}dxdydz\rho R_n \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

гдѣ $\frac{1}{6}dxdydz$ - объемъ тетраэдра, ρ масса единицы объема, а R_n величина объемной силы, дѣйствующей по направленію n на единицу массы.

Величина объема тетраэдра, входящая въ выраженіе (b), является величиной безконечно малой высшаго порядка по сравненію съ поверхностями граней, на которыя умножаются давленія въ выраженіи (a). Поэтому дѣйствіемъ объемныхъ силъ можно пренебрегать.

Называя l, m, n cosinus'ы угловъ, составляемыхъ нормалью n съ осями координатъ и приравнивая нулю проекціи на оси координатъ силъ, дѣйствующихъ на тетраэдръ, имѣемъ:

$$\frac{1}{2} p_x dz dy - F_n p_n l = 0$$

$$\frac{1}{2} p_y dx dz - F_n p_n m = 0$$

$$\frac{1}{2} p_z dx dy - F_n p_n n = 0 ,$$

Но такъ какъ въ свою очередь

$$\frac{1}{2} dy dz = l F_n$$

$$\frac{1}{2} dx dz = m F_n$$

$$\frac{1}{2} dx dy = n F_n$$

то, очевидно,

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p$$

Слѣдовательно, напряженное состояніе въ точкѣ А характеризуется одинаковымъ по всѣмъ направленіямъ давленіемъ p . Эллипсоидъ напряженій представляется въ видѣ шара. Давленіе p называютъ *гидростатическимъ* давленіемъ въ точкѣ А. Измѣряютъ его обычно въ киллогр. на кв. сантиметръ или атмосферахъ, въ тоннахъ на кв. метръ и т.д.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что напряженное состояніе въ каждой точкѣ вполнѣ опредѣленно характеризуется одной величиной "гидростатическаго давленія", которое, на основаніи всего вышесказаннаго, зависитъ лишь отъ мѣстоположенія точки, т.е. является лишь функціей *координатъ точки*.

6. Гидростатическое давленіе для покоющейся тяжелой жидкости.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ величину гидростатическаго давленія можно опредѣлить путемъ самыхъ элементарныхъ разсужденій; таковымъ, напримѣръ, является случай покоющейся тяжелой жидкости, т.е. жидкости подверженной лишь силамъ тяжести. Пусть въ точкѣ А (фиг.3) проведена горизонтальная площадка dF , вертикальное разстояніе которой до уровня сво-

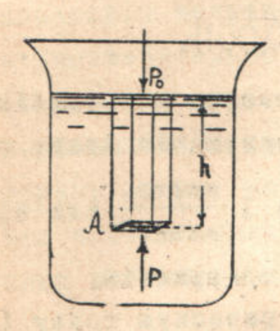
бодной поверхности жидкости h.

Построимъ вертикальный цилиндръ, проводя вертикальныя образующія черезъ контуръ площадки. Спроектируемъ силы, дѣйствующія на цилиндръ, на ось параллельную силѣ тяжести. Сумма проекцій всѣхъ давленій на боковую поверхность цилиндра, очевидно, равна нулю. Давленіе на основаніе цилиндра снизу $dF \cdot p$, гдѣ p гидростатическое давленіе въ точкѣ А. Уравненіе равновѣсія:

$$dF \cdot p = dF p_0 + dF h \gamma$$



Фиг.3.



гдѣ p_0 давленіе на свободную поверхность жидкости, а γ вѣсъ единицы объема ея.

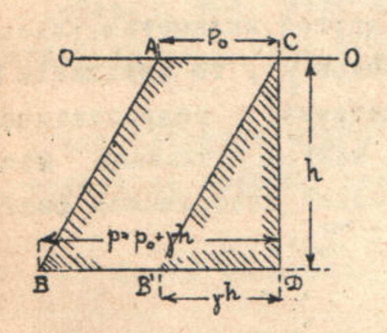
Такимъ образомъ, гидростатическое давленіе

$$p = p_0 + \gamma h \quad . \quad . \quad (1)$$

равно давленію на свободной поверхности, сложенной съ вѣсомъ столба жидкости, основаніе котораго единица, а высота равна глубинѣ погруженія точки А подъ свободной поверхностью жидкости.

Выраженіе (1) весьма просто поддается графической интерпретаціи.

Фиг.4.



На фиг.4 О - О свободная поверхность жидкости.

Гидростатическое давленіе внутри ея изображается трапеціей $CABD$, любая ордината которой BD (равная $p = p_0 + \gamma h$) изображаетъ величину давленія въ точкѣ D на глубинѣ $CD = h$.

Весьма часто желательно знать, такъ называемое, избыточное давленіе ($p_m = p - p_0$) отъ вѣса жидкости, не принимая во вниманіе давленія на свободную поверхность.

Графикъ избыточнаго давленія, очевидно, представляется въ видѣ треугольника $CB'D$. $B'D = \gamma h$ изображаетъ величину из-

быточнаго давленія въ точкѣ D на глубинѣ h.

Графическое изображеніе давленій находитъ самое широкое примѣненіе при рѣшеніи практическихъ задачъ.

Опредѣлимъ теперь, какъ выражается для воды величина γh въ различныхъ мѣрахъ.

a) *Мѣры метрическія.*

Если p желательно получить въ $\frac{\text{килгр.}}{\text{сант.}^2}$ или атмосферахъ, то за единицу мѣръ надлежитъ принять, очевидно, килограммъ и сантиметръ. γ (вѣсъ въ килограммахъ одного куб. сант.) равенъ 0.001.

Такимъ образомъ,

$$p_m = p - p_0 = \gamma h = 0{,}001 h \quad . \quad . \quad (*).$$

Давленіе возрастаетъ на каждый сантиметръ погруженія на 0.001 атмосферы; каждый лишній метръ погруженія даетъ, очевидно, 0,1 килгр. давленія. Давленіе въ 1 $\frac{\text{килгр.}}{\text{сант.}^2}$ или въ одну атмосферу соотвѣтствуетъ 10 метрамъ погруженія.

b) Если принять за единицу мѣръ метрическую тонну (1000 килгр.) и метръ, то давленіе въ тоннахъ на квадр. метръ выразится, принимая во вниманіе, что γ (вѣсъ въ тоннахъ одного куб. метра) равенъ 1 т.:

$$p_m = p - p_0 = 1 . h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

такъ, что каждый метръ погруженія даетъ давленіе въ одну тонну на кв. метръ.

Если имѣть дѣло съ какой либо другой жидкостью, удѣльный вѣсъ которой, по сравненію съ водой γ_1, то выраженіе (*) и (**) надо умножить на γ_1. Такъ, напримѣръ, гидростатическое избыточное давленіе въ бакѣ съ нефтью, удѣльнаго вѣса 0,91, на глубинѣ 10 метровъ отъ свободной поверхности составляетъ, очевидно, 0,91 kgr/ctm^2 или 9,1 tn/mtr^2.

Русскія мѣры.

Пуды и футы	$p_m = 1.73 h$
Пуды и сажени	$p_m = 593 h$
Фунты и футы	$p_m = 69 h$

7. Пьезометрическое давленіе.

Мы выше видѣли, что въ случаѣ тяжелой жидкости давленіе

выражается вѣсомъ столба жидкости. Такъ, напримѣръ, оказалось, что давленію въ одну метрическую атмосферу (1 $^{klgr}/_{ctm^2}$) соотвѣтствуетъ столбъ воды высотою въ 10 метровъ и пр.; вообще

$$p = \gamma h \quad \text{и} \quad h = \frac{p}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Очевидно, величину давленія вмѣсто обычной мѣры $\frac{\text{сила}}{\text{ед. площ.}}$ можно просто характеризовать соотвѣтствующей высотою столба жидкости. Такъ, например, вмѣсто того, чтобы говорить: давленіе въ 3,5 атмосферы, можно сказать: давленіе въ 35 метровъ водяного столба.

Выраженіе величины давленія высотою столба жидкости очень употребительно въ физикѣ и техникѣ. Такъ, напримѣръ, давленіе воздуха обычно измѣряютъ въ мм. ртутнаго столба; давленія и разрѣженія, производимыя воздуходувными машинами и вентиляторами въ мм. водяного столба. Въ гидравликѣ давленія большею частью выражаются въ метрахъ водяного столба, причемъ величина избыточнаго давленія

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p - p_0}{\gamma}$$

выраженная высотою столба жидкости носитъ названіе *пьезометрическаго* давленія или пьезометрической высоты.

Изъ формулъ (2) само собой ясенъ способъ перехода отъ пьезометрическихъ давленій къ обычнымъ. Напомнимъ лишь еще разъ, что величины p, γ и h должны выражаться въ одинаковыхъ мѣрахъ, т.е. надо впередъ остановиться на опредѣленной единицѣ длины и вѣса и выразить въ нихъ всѣ величины p, γ, h.

Несоблюденіе этого крайне элементарнаго правила часто приводитъ къ грубымъ ошибкамъ.

8. *Общія уравненія гидростатики.*

Въ предыдущемъ мы посредствомъ элементарныхъ соображеній нашли распредѣленіе гидростатическаго давленія въ случаѣ покоющейся тяжелой жидкости.

Расширимъ теперь постановку вопроса. Поставимъ, именно, общій вопросъ слѣдующимъ образомъ:

"Найдемъ общія условія равновѣсія жидкаго тѣла и при

заданной системѣ силъ найдемъ распредѣленіе давленія внутри его".

Вышеуказанную постановку вопроса можно характеризовать, какъ основную и общую задачу гидростатики. Въ окончательной формѣ отвѣтъ на вопросъ далъ Эйлеръ*). До него вопросомъ занимались Newton, Huyghens, Clairault.

Выдѣлимъ въ жидкости, находящейся въ равновѣсіи у точки A (ф.5) элементарный параллелепипедъ со сторонами, параллельными осямъ координатъ dx, dy, dz.

Среднее давленіе на площадки, нормальныя къ осямъ координатъ и проходящія черезъ точку A ($ACHD$, $ABGD$, $ABEC$) будутъ отличаться отъ давленія p въ точкѣ A на величину безконечно малую. Этимъ различіемъ пренебрежемъ**). Давленія на площадки $EBFG$, $CHFE$, $DHFG$ будутъ соотвѣтственно равны

Фиг. 5.

$$p+\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

$$p+\frac{\partial p}{\partial y}dy$$

$$p+\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Массу единицы объема жидкости обозначимъ $\rho=\frac{\gamma}{g}$; объемную силу, дѣйствующую на единицу массы, Q; проекціи ея на оси координатъ соотвѣтственно q_x, q_y, q_z. Приложенныя къ выдѣленному элементу жидкости силы находятся въ равновѣсіи; имѣемъ, слѣдовательно, для оси x:

$$p\,dy\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz+q_x\rho\,dx\,dy\,dz=0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x}=q_x\rho$$

---

*) Histoire de l'Académie de Berlin. 1755.

**) *Болѣе точный выводъ съ принятіемъ во вниманіе этого отличія см. Сатхевичъ "Гидромеханика".*

Составляя подобныя же уравненія для другихъ осей, получаемъ систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} &= q_x \\ \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} &= q_y \\ \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} &= q_z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

и вообще, если n любое направленіе,

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial n} = q_n$$

гдѣ q_n проекція объемной силы, дѣйствующей на единицу массы, на направленіе n. Уравненія (3) и составляютъ общія дифференціальныя уравненія равновѣсія жидкости, въ томъ видѣ, какъ даны Эйлеромъ. Умножая уравненія послѣдовательно на dx, dy, dz и складывая, получаемъ:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = q_x dx + q_y dy + q_z dz \qquad (4)$$

Какъ мы выше указали, въ жидкости, находящейся въ равновѣсіи, гидростатическое давленіе является функціей однѣхъ координатъ. Выраженіе, стоящее въ скобкахъ на лѣвой сторонѣ есть поэтому полный дифференціалъ; уравненіе (4), слѣдовательно, можно переписать въ видѣ

$$\frac{1}{\rho}dp = q_x dx + q_y dy + q_z dz \quad . \quad . \quad . \qquad (4')$$

Чтобы уравненіе (4') имѣло смыслъ, нужно прежде всего, чтобы и правая часть этого уравнеія (4') являлась полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи U, т.е.

$$q_x dx + q_y dy + q_z dz = dU$$

что, очевидно, требуетъ, чтобы

$$q_x = \frac{\partial U}{\partial x}\ ;\ q_y = \frac{\partial U}{\partial y}\ ;\ q_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad . \quad . \qquad (5)$$

Другими словами, система объемныхъ силъ, дѣйствующихъ на жидкость, должна имѣть потенціалъ. Функція U является такъ называемой *силовой функціей*.

Далѣе, для интегрированія уравненія необходимо, чтобы масса единицы объема ϱ была либо постоянной, либо функціей лишь одного давленія p.

Такимъ образомъ, общія условія, при которыхъ возможно равновѣсіе жидкости вообще, являются слѣдующія:

1) Дѣйствующія объемныя силы должны имѣть потенціалъ; т. е. должна существовать функція U, зависящая лишь отъ координатъ, частныя производныя которой по любому направленію равны проекціямъ на это направленіе объемной силы, дѣйствующей на единицу массы.

2) плотность жидкости должна зависѣть лишь отъ давленія.

При невыполненіи этихъ условій жидкость вообще въ равновѣсіи находиться не можетъ.

Эти общія условія были полностью формулированы еще Clairault въ его знаменитомъ сочиненіи "О фигурѣ земли" (1743). Разысканіе фигуры геоида привело его къ постановкѣ и разрѣшенію общаго вопроса о равновѣсіи жидкаго тѣла*). Изслѣдованія Clairault послужили также основой теоріи потенціала.

Намъ довольно трудно представить себѣ жидкость, которая подъ дѣйствіемъ системы силъ не могла бы прійти въ равновѣсіе и находилась бы, по выраженію Эйлера, въ состояніи "постояннаго волненія" (agitation continuelle). Но трудность такого представленія, по замѣчанію Эйлера, является лишь слѣдствіемъ того, что объемныя силы, дѣйствіе которыхъ мы привыкли наблюдать, всѣ имѣютъ потенціалъ и мы не имѣемъ опыта въ наблюденіи противнаго.

9. *Вернемся теперь къ нашимъ уравненіямъ.*

Для капельной жидкости плотность постоянна. Переписываемъ (4'), принимая во вниманіе (5)

$$dp = \varrho\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = \varrho dU$$

Интегрируя получаемъ:

$$p = C + \varrho U \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

---

*) *Интересныя свѣдѣнія историческаго характера см.* Mach. Mechanik *стр. 428.*

или

$$p - p_0 = \varrho (U - U_0) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Уравненія (6) и (7) свидѣтельствуютъ о томъ, что распредѣленіе давленія въ жидкости, находящейся въ равновѣсіи, въ точности копируетъ распредѣленіе силовой функціи.

Тѣмъ самымъ общія свойства силовой функціи, изучаемыя въ теоріи потенціала, характеризуютъ также и распредѣленіе давленій.

Поверхности уровня или поверхности равнаго потенціала являются въ то же время поверхностями равнаго давленія. Уравненіе такой поверхности $dU = 0$

или $dp = 0$

Свободная поверхность жидкости, какъ поверхность равнаго давленія, является, очевидно, поверхностью уровня. Равнодѣйствующая объемныхъ силъ перпендикулярна къ поверхности уровня. Ея величина равна $\varrho q_n = \varrho \frac{\partial U}{\partial n}$

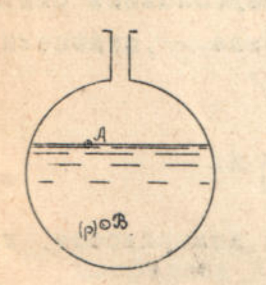
10. Законъ Паскаля.

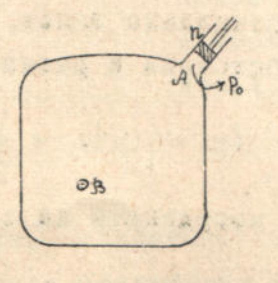
Уравненіе (7) показываетъ также, что разность давленій между двумя точками есть умноженная на плотность разность силовой функціи для двухъ этихъ точекъ.

Изъ этого слѣдуетъ важное обобщеніе извѣстное подъ именемъ закона Паскаля. Разсмотримъ два сосуда (фиг. 6 a и 6 b).



Фиг. 6 a. *Фиг. 6 b.*





Второй совершенно, а первый невполнѣ, заполненъ жидкостью; въ первомъ имѣется свободная поверхность CD. Во второмъ въ точкѣ A устроенъ поршенекъ n. На жидкость дѣйствуетъ нѣкоторая система силъ, удовлетворяющая общимъ условіямъ равновѣсія. Напишемъ уравненіе (7) въ формѣ

$$p = p_0 + \varrho(U - U_0) \quad . \quad . . \quad . \quad (7^{bis})$$

Величину p_0 и U_0 будемъ относить къ точкѣ A, находящейся въ первомъ сосудѣ на свободной поверхности, во второмъ сосудѣ у поршенька. Величина $\varrho(U-U_0)$ зависитъ лишь отъ системы объемныхъ силъ и не зависитъ отъ величины давленія p_0 въ точкѣ A. Отсюда ясно, что, измѣняя произвольно на нѣкоторую величину давленіе p_0 въ верхней свободной полости перваго сосуда или подъ поршенькомъ K во второмъ, мы на ту же величину будемъ измѣнять давленіе въ любой точкѣ жидкости.

Это и служитъ доказательствомъ закона Паскаля, согласно которому, давленіе, приложенное къ свободной поверхности жидкости, или къ любой точкѣ на поверхности жидкости замкнутой въ сосудѣ, равномѣрно передается во всѣ точки жидкости. Законъ этотъ также весьма просто доказывается помощью начала возможныхъ перемѣщеній.

11. *Разысканіе давленія въ частныхъ случаяхъ.*

Для нахожденія распредѣленія давленія, какъ мы видѣли выше, достаточно найти силовую функцію системы силъ, дѣйствующихъ на жидкость. Для этой цѣли необходимо лишь составить дифференціальное уравненіе

$$dU = q_x dx + q_y dy + q_z dz$$

и проинтегрировать его.

Всего лучше объяснить это разборомъ ряда частныхъ случаевъ.

I. Тяжелая покоющаяся жидкость (фиг.3). Единственная объемная сила есть сила земного притяженія. Предположимъ ось Z оэъ направленной вертикально внизъ. Тогда сила q_z, отнесенная къ единицѣ массы, постоянна и равна g.

$$dp = \varrho g dz = \frac{\gamma}{g} g dz = \gamma dz$$

Назначая начало координатъ на свободной поверхности, гдѣ давленіе p_0, имѣемъ

$$p - p_0 = \gamma z$$

т.е. уравненіе (1).

Поверхности равнаго давленія характеризуются $z = const$; т.е. представляются въ видѣ горизонтальныхъ плоскостей.

II. Найдемъ распредѣленіе давленія въ тяжелой жидкости, равномѣрно вращающейся въ открытомъ сверху сосудѣ съ угловой скоростью ω. Если движеніе установилось, то жидкость находится въ покоѣ относительно сосуда, и можно примѣнить уравненіе равновѣсія, если къ дѣйствующимъ силамъ присоединить еще силы инерціи, вызванныя вращательнымъ движеніемъ. Движеніе симметрично относительно оси; поэтому достаточно разсмотрѣть любую меридіональную плоскость. Беремъ начало координатъ на оси на свободной поверхности жидкости. Ось $Z^{ов}$ вертикально внизъ; за другую координату беремъ радіусъ r.

Сила инерціи есть центральная сила. Величина ея q_r, дѣйствующая на единицу массы, очевидно

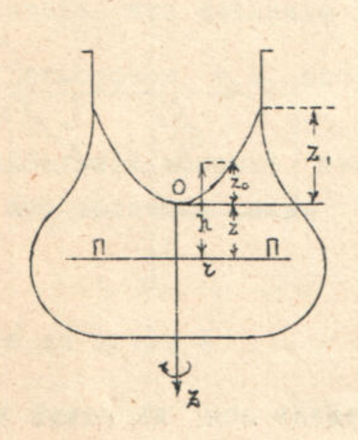
$$q_r = \omega^2 r$$

$$dp = \rho(\omega^2 r dr + g dz) = \frac{\gamma}{g}\omega^2 r dr + \gamma dz$$

интегрируя, получаемъ:

$$p = c + \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 r^2}{2} + \gamma z \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Фиг. 7.



Опредѣляемъ C изъ условія, что въ началѣ координатъ давленіе равно давленію на свободной поверхности p_o; имѣемъ

$$p - p_o = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{2}r^2 + \gamma z \qquad (9)$$

Уравненіе свободной поверхности $p = p_o$ въ разсматриваемомъ меридіональномъ сѣченіи напишется:

$$z + \frac{\omega^2}{2g}r^2 = 0$$

Свободная поверхность является, слѣдовательно, параболоидомъ вращенія. Величина превышенія любой точки свободной поверхности надъ началомъ координатъ (z_o)

$$z_o = -\frac{\omega^2}{2g}r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Поверхности равнаго давленія:

$$z + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = Const.$$

т.е. также параболоиды вращенія.

Найдемъ распредѣленіе давленія вдоль горизонтальной плоскости П-П, координата которой z.

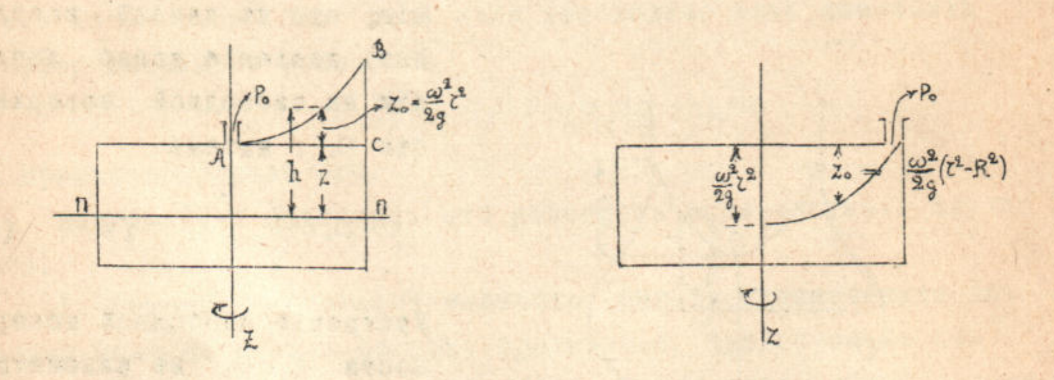
Въ уравненіи (9) считаемъ z постояннымъ. Подставляя кромѣ того изъ уравненія (10) значеніе z_o, имѣемъ:

$$p - p_o = \gamma\left(z - \frac{\omega^2}{2g} r^2\right) = \gamma(z - z_o) = \gamma h$$

Такимъ образомъ, давленіе соотвѣтствуетъ столбу жидкости, равному разстоянію отъ плоскости П-П до свободной поверхности жидкости.

Замкнутый сосудъ. Очевидно, распредѣленіе давленій выражалось бы совершенно также, если бы сосудъ былъ замкнутымъ (фиг. 8 и 9) и былъ бы совершенно заполненъ жидкостью. Вопросъ лишь въ опредѣленіи постоянной. Въ случаѣ, изображен-

Фиг. 8. Фиг. 9.



номъ на фиг.8, предполагается, что возлѣ оси, въ точкѣ A въ крышкѣ сосуда сдѣлано отверстіе; благодаря этому во все время движенія въ точкѣ A поддерживается давленіе равное p_o. Распредѣленіе давленія цѣликомъ совпадаетъ съ (9). Давленіе по плоскости AC выражается высотою столба жидкости

$$-z_o = \gamma \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

Въ фиг.9 предположено, что отверстіе въ крышкѣ сдѣлано

на наружномъ краѣ въ точкѣ C. Очевидно, во время движенія давленія въ C также будетъ равно p_0.

Въ этомъ случаѣ, для опредѣленія постоянной въ уравненіи (8), имѣемъ:

$$p_0 = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} R^2 + C$$

Подставляя, получимъ

$$p - p_0 = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) + \gamma z$$

Давленіе непосредственно подъ крышкой ($z = 0$) будетъ меньше наружнаго. Жидкость подъ крышкой будетъ въ состояніи разрѣженія. Если принять, что p_0 есть атмосферное давленіе, то величина $p_0 - p$ изображаетъ избытокъ атмосфернаго давленія надъ давленіемъ p. Этотъ избытокъ, измѣряющій степень разрѣженія, называется *вакуумомъ*.

Вакуумъ, очевидно, можно выражать различнымъ образомъ. Его можно выражать, подобно давленію p, въ видѣ давленія на единицу поверхности, или высотою водяного столба, или, наконецъ, въ процентахъ отъ атмосфернаго давленія и пр.

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, если говорить, что вакуумъ, напримѣръ въ конденсаторѣ паровой турбины, составляетъ 90%, это значитъ, что давленіе въ конденсаторѣ ниже атмосфернаго на 0,9 атмосферы, т.е. составляетъ лишь 0,1 атм. или $\frac{0.1 \, kg}{cm^2}$ и пр.

Наибольшій вакуумъ, очевидно, будетъ имѣть мѣсто въ точкѣ A; его величина равна

$$p_0 - p = \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{2} R^2$$

Даленіе въ точкѣ A

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} R^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Очевидно, что съ увеличеніемъ скорости вращенія величина давленія p уменьшается (и вакуумъ соотвѣтственно увеличивается). Однако, уменьшенію p по самой сути вещей положенъ предѣлъ. Въ силу опредѣленія жидкости между частицами могутъ существовать лишь сжимающія напряженія. Отсюда слѣдуетъ, что абсолютная величина давленія p не можетъ быть отрицательной. Жидкость, въ случаѣ пониженія p ниже нуля, пре-

терпѣваетъ разрывъ, теряетъ непрерывность, т. е. свойство полностью безъ пустотъ заполнять пространство. Очевидно, при этомъ уже физически невозможно равновѣсіе. Жидкость будетъ выливаться черезъ отверстіе C ; внутри же будутъ образовываться пустоты.

Опредѣлимъ величину предѣльной угловой скорости ω_k, при которой давленіе въ A падаетъ до нуля. Изъ (11), очевидно, что

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2gp_0}{\gamma} \cdot \frac{1}{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Примѣръ: если $R = 0,5$ метра; $p_0 = 1$ атмосфера; $\frac{p_0}{\gamma} = 10$ метровъ водяного столба; $\sqrt{2g} = 4.43$, то:

$$\omega_k = \frac{4.43}{0.5}\sqrt{10} = \backsim 28$$

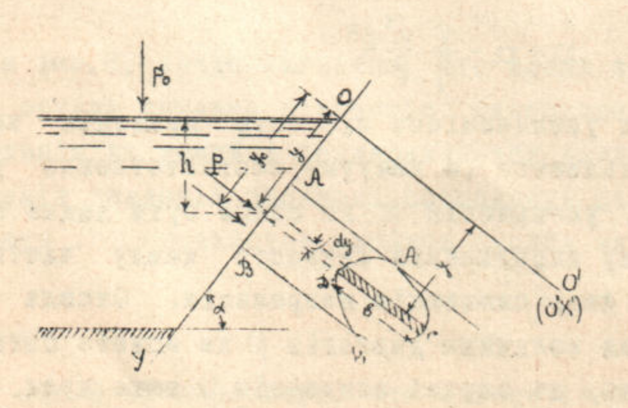
что соотвѣтствуетъ около 268 об./мин.

На самомъ дѣлѣ, благодаря тому, что въ жидкости обычно заключается растворенный воздухъ и газы, послѣдніе вмѣстѣ съ пониженіемъ давленія начнутъ энергично выдѣляться и жидкость начнетъ вытекать черезъ отверстіе много раньше, чѣмъ будетъ достигнута предѣльная скорость, получаемая изъ уравненія (12).

12. *Опредѣленіе полнаго давленія на погруженную въ тяжелую жидкость плоскую фигуру.*

На фиг. 10 ось OY представляетъ сѣченіе фигуры плоскостью чертежа. Ось X -овъ полагаемъ совпадающей со свободной горизонтальной поверхностью жидкости. Въ правой части чертежа

Фиг. 10.



фигура $ABCD$ изображена повернутой вокругъ оси OY и совмѣщенной съ плоскостью чертежа. Ось OX при этомъ заняла положеніе OO'. Выдѣлимъ на фигурѣ полоску высотою

dy, шириною b, параллельную оси OX. Давленіе по всей такой полоскѣ одинаково. Площадь ея $dF = b \cdot dy$.

Полное давленіе на полоску:

$$\Delta p = (\gamma h + p_o)dF = p_o dF + \gamma dF y \sin\alpha$$

гдѣ h глубина погруженія полоски, α уголъ наклона плоскости фигуры къ горизонту.

Полное давленіе на всю фигуру опредѣлится, какъ сумма давленій на отдѣльныя полоски

$$P = \int_F p_o dF + \int_F \gamma y \sin\alpha dF$$

гдѣ значекъ F у интеграла показываетъ, что интегрированіе необходимо распространить на всю поверхность фигуры.

Очевидно

$$P = p_o F + \gamma \sin\alpha F y_o = F(p_o + \gamma h_o) \quad . \quad . \quad (13)$$

гдѣ y_o и h_o координата и соотвѣтствующая глубина погруженія центра тяжести фигуры.

Но $p_o + \gamma h_o$ есть ничто иное, какъ гидростатическое давленіе въ центрѣ тяжести фигуры. Отсюда получаемъ правило:

"Полное давленіе жидкости на погруженную плоскую фигуру равно произведенію площади фигуры на величину гидростатическаго давленія въ ея центрѣ тяжести".

13. *Центръ давленія.*

Опредѣлимъ теперь еще точку приложенія равнодѣйствующей всѣхъ давленій P или, такъ называемый, центръ давленія.

Найдемъ отдѣльно точку приложенія равнодѣйствующей избыточныхъ давленій p_m. Очевидно, точка приложенія равнодѣйствующей давленій p_o совпадаетъ съ центромъ тяжести фигуры. Составимъ уравненіе моментовъ вокругъ оси OX

Моментъ избыточныхъ давленій, дѣйствующихъ на элементарную площадку:

$$\Delta M = \gamma \sin\alpha y^2 dF$$

Моментъ соотвѣтственной равнодѣйствующей, назвав y_{c_1} координату центра давленій,

Очевидно

$$M = F\gamma \sin\alpha\, y_0 y_{c_1} = \int_F \gamma \sin\alpha\, y^2 dF$$

$$M = F\gamma \sin\alpha\, y_0 y_{c_1} = \int_F \gamma \sin\alpha\, y^2 dF$$

или

$$F\gamma \sin\alpha\, y_0 y_{c_1} = \gamma \sin\alpha\, J_0$$

откуда

$$y_{c_1} = \frac{J_0}{F y_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

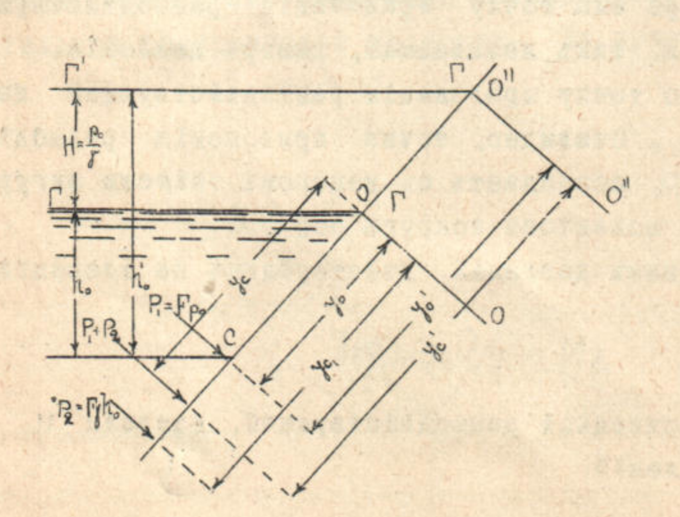
т.е. координата центра давленія равна отношенію момента инерціи фигуры, относительно линіи пересѣченія свободной поверхности съ плоскою фигуры, къ статическому моменту фигуры относительно той же оси. Называя ϱ_0 и ϱ_c радіусы инерціи фигуры относительно оси OO' и параллельной ей оси, проходящей черезъ центръ тяжести, имѣемъ:

$$y_{c_1} = \frac{F\varrho_0^2}{F y_0} = \frac{y_0^2 - \varrho_c^2}{y_0} = y_0 + \frac{\varrho_c^2}{y_0} \quad . \quad . \quad . \quad (14^*)$$

Такимъ образомъ, центръ давленія всегда ниже центра тяжести фигуры; разстояніе между ними (по координатѣ y) равно $\frac{\varrho_c^2}{y_0}$ отношенію квадрата радіуса инерціи относительно горизонтальной оси, проходящей черезъ центръ тяжести, къ разстоянію до центра тяжести. Замѣтимъ, что координата центра давленія (14*) есть приведенная длина физическаго маятника.

Знавая величины и точки приложенія двухъ частныхъ равнодѣйствующихъ нетрудно опредѣлить координату y_c точки приложенія полной равнодѣйствующей.

Фиг. 11.



Въ приложеніяхъ, однако, обычно приходится опредѣлять лишь точку приложенія равнодѣйствующей избыточныхъ давленій p_m.

Замѣтимъ лишь, что координата точки приложенія пол-

каго давленія будетъ выражаться формулой, подобной (14) или (14*), если только за ось абсциссъ взять ось 0"0" - линію пересѣченія плоскости фигуры съ горизонтальной поверхностью $\Gamma'\Gamma'$ находящейся выше свободной поверхности жидкости $\Gamma\Gamma$ на высоту $H = \frac{p_0}{\gamma}$, представляющую собою пьезометрическую высоту, соотвѣтствующую давленію p_0 на свободной поверхности. Очевидно, считая глубины отъ этой поверхности, мы имѣемъ давленіе въ любой точкѣ

$$p = p_0 + \gamma h_0 = \gamma(H + h_0) = \gamma h'_0$$

Полное давленіе

$$P = F\gamma h'_0$$

Ясно, что

$$y'_c = \frac{J_{o'}}{F y'_0}$$

и т.д.

14. Графическіе пріемы опредѣленія центра давленія.

Во многихъ случаяхъ практики предпочтительно при опредѣленіи центра давленія пользоваться графическими пріемами.

Пусть, напримѣръ, требуется опредѣлить избыточное давленіе воды на вертикальный водоудержательный щитъ, перегораживающій прямоугольный каналъ шириною $b = 2$ м. глубиною $h_0 = 2.5$ м.; величина давленія опредѣляется, какъ произведеніе площади щита на давленіе въ центрѣ тяжести.

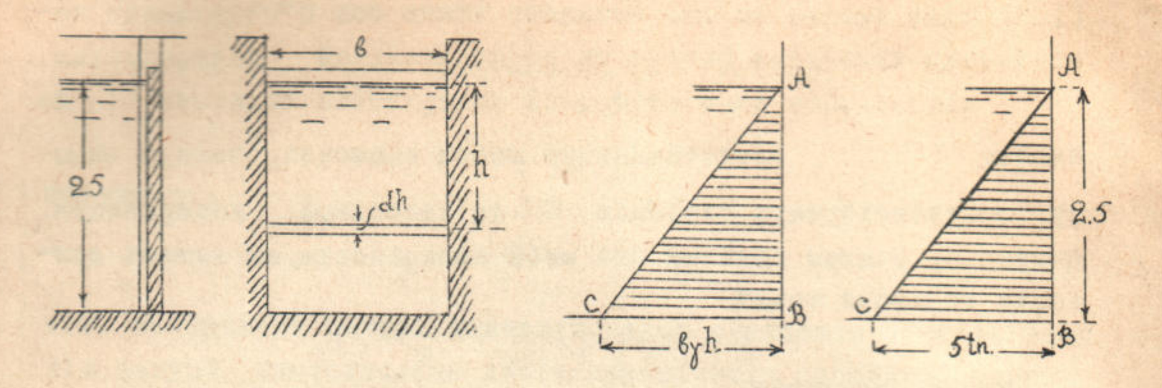
Площадь щита $F = bh_0$; давленіе въ центрѣ тяжести $p = \frac{1}{2}\gamma h_0$

$$P_m = \frac{b}{2}\gamma h_0^2 = 6.25 \text{ тоннъ.}$$

Для нахожденія центра давленія разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ: такъ какъ ширина щита всюду одинакова, то давленіе на элементарную полоску высотою dh, при ширинѣ щита b, выразится черезъ $\gamma h b dh$. Діаграмма давленій на полоску щита высотою единицу выражается, очевидно, какъ выше въ случаѣ стр. 13 треугольникомъ ABC (черт. 13 а), ордината котораго $b\gamma h$. (Для разсматриваемаго конкретнаго случая діаграмма изображена на черт. 13 b).

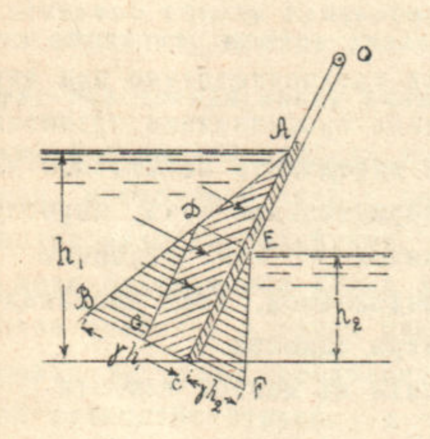
Площадь треугольника въ соотвѣтственномъ масштабѣ изображаетъ величину равнодѣйствующей $\left(\frac{2.5 \times 5}{2} = 6.25 t_n\right)$; точка ея приложенія совпадаетъ, очевидно, съ центромъ тяжести треуголь-

Фиг. 12. Фиг. 13а и 13б.



ника, т.е. находится на трети высоты. Безъ труда станетъ яснымъ теперь построеніе приведенное на ф.14, изображающее построеніе центра избыточнаго давленія на наклонный щитъ OC, перегораживающій прямоугольный каналъ, въ которомъ вода стоитъ съ обѣихъ сторонъ щита*). Очевидно, треугольникъ ABC изображаетъ діаграмму давленія съ верхней стороны, треугольникъ CFE съ низовой стороны щита.

Фиг. 14.



Результирующей діаграммой будетъ фигура ADGC; равнодѣйствующая будетъ проходить черезъ ея центръ тяжести.

15. *Опредѣленіе величины и центра давленія на кривую поверхность.*

Такъ какъ величина и направленіе полнаго давленія вполнѣ опредѣляется по тремъ любымъ, не лежащимъ въ одной плоскости составляющимъ, то для рѣшенія вопроса достаточно рѣшить слѣдующую задачу: опредѣлить составляющую полнаго давленія по какому нибудь направленію N.

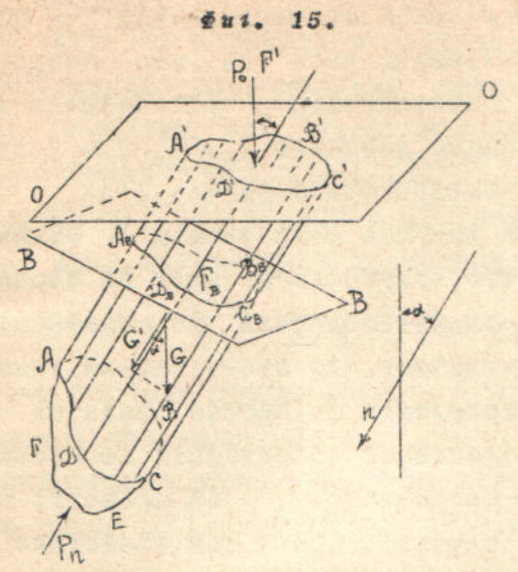
Пусть (на фиг. 15) имѣемъ криволинейную поверхность ABCDEF.

---

*) *На черт. приведено давленіе на единицу ширины щита.*

Черезъ контуръ ея $ABCD$ проведемъ цилиндрическую поверхность, параллельную направленію n; цилиндрическая поверхность пересѣчетъ свободную поверхность по контуру $A'B'C'D'$, вырѣзавъ фигуру площадью F'. Для опредѣленія искомой составляющей давленія P_n разсмотримъ условія равновѣсія жидкаго тѣла, ограниченнаго поверхностью $ABCDEF$, цилиндрической поверхностью и плоскостью $A'B'C'D'$.

фиг. 15.

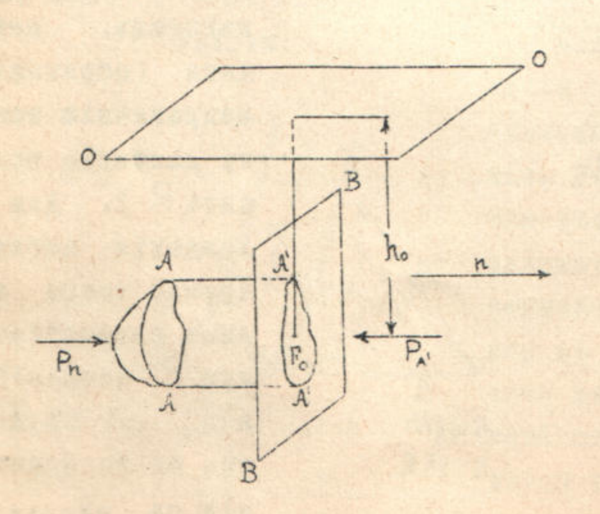


Если вѣсъ жидкости, находящейся внутри этого тѣла, G и α уголъ, составляемый направленіемъ n съ вертикалью, то проектируя дѣйствующія силы на направленіе n, имѣемъ:

$$P_n = G\cos\alpha + P_0 F'\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \qquad (I)$$

Итакъ все дѣло свелось къ опредѣленію объема отсѣченнаго тѣла и площади F'. Нѣтъ надобности обязательно добиваться пересѣченія цилиндрической поверхности свободной поверхностью жидкости. Достаточно пересѣчь ее любой плоскостью BB и найти площадь фигуры $(ABCD)_B$. Въ уравненіи равновѣсія (I), очевидно, въ этомъ случаѣ второй членъ $P_0F'\cos\alpha$ замѣнился бы $P_{B(n)}$, т.е. проекціей на n давленія на плоскую фигуру $(ABCD)_B$, которое опредѣлится на основаніи уравненія (13).

фиг. 16.



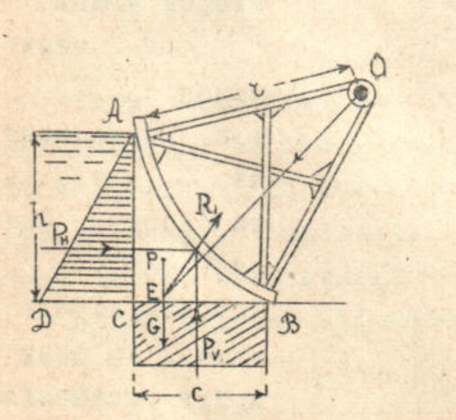
Опредѣлимъ, напримѣръ, горизонтальную составляющую P_n на фигуру АА (фиг. 16). Черезъ контуръ фигуры проводимъ цилиндрическую поверхность (образующія горизонтальны) и пересѣкаемъ ее вертикальной, перпендикулярной къ направленію n, плоскостью B-B. Такъ какъ составляющая вѣса на это направленіе равна нулю, то, очевидно, горизонтальная составляющая давленія P_n равна гидростатическому давленію $P_{A'} = F_{A'}(\gamma h_c + p_o)$ на вырѣзанную цилиндрической поверхностью фигуру А'А'.

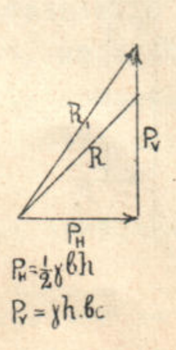
Очевидно, рѣшеніе и при другомъ направленіи n ничѣмъ не отличалось бы отъ только что полученнаго, если бы вѣсомъ отсѣченнаго тѣла можно было бы пренебрегать по сравненію съ давленіемъ на вырѣзанную площадку. Въ этомъ случаѣ также составляющая давленія по направленію n просто была бы равна давленію на проекцію криволинейной поверхности на плоскость, перпендикулярную къ этому направленію n. На практикѣ обычно рѣшеніе задачи во многихъ случаяхъ можно еще нѣсколько упростить. Рѣшимъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

1. Опредѣлимъ давленіе на цилиндрическій сегментный затворъ, перегораживающій прямоугольный каналъ шириною b метр. и глубиною h метр. Поверхность затвора есть поверхность кругового цилиндра радіуса r съ горизонтальной осью OO, около которой вращается затворъ подвѣшенный на шарнирѣ (фиг.17).

Для рѣшенія задачи разсмотримъ равновѣсіе отсѣка ACB, ограниченнаго съ одной стороны цилиндрической поверхностью щита AB, съ другихъ двухъ горизонтальной и вертикальной площадкой CB и AC На отсѣкъ кромѣ вѣса G, приложеннаго въ центрѣ тяжести F, дѣйствуютъ давленія на AC и CB – $P_н$ и P_v и, наконецъ, реакція щита (обратная по направленію искомому давленію воды на щитъ R). Для нахожденія послѣдней прежде всего находимъ равнодѣйствующую R_1 давленій $P_н$ и P_v. Продолжаемъ ее до пересѣченія съ направлені-

Фиг. 17.





емъ вѣса отсѣка G (самой величинѣ вѣса G знать нѣтъ надобности) проходящимъ черезъ центръ тяжести F. Черезъ точку пересѣченія E, очевидно, и должно проходить искомое давленіе R.

Такъ какъ всѣ элементы поверхности перпендикулярны къ радіусамъ, то всѣ элементарныя давленія проходятъ черезъ центръ O; очевидно, что черезъ эту же точку проходитъ также и равнодѣйствующая всѣхъ давленій R.

Соединяемъ E съ O Линія EO есть направленіе равнодѣйствующей. Зная направленіе послѣдней и величину горизонтальной составляющей $P_н = \frac{1}{2} b \gamma h^2$ находимъ построеніемъ (на отдѣльномъ чертежѣ сбоку) величину полнаго давленія и его вертикальной составляющей.

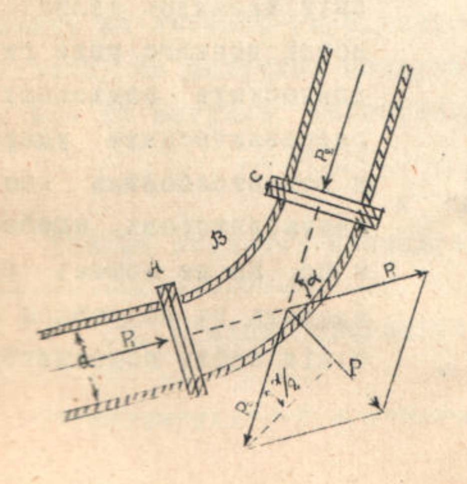
2. Опредѣлимъ равнодѣйствующую давленій воды на кривой участокъ трубы ABC. Пусть давленіе воды p **атмосферъ и** діаметръ трубы d cm. Пренебрежемъ вѣсомъ заключенной въ колѣнѣ воды и разсмотримъ равновѣсіе отсѣка воды, заключеннаго въ колѣнѣ; на плоскости AA' и CC' дѣйствуютъ равныя между собой давленія:

$$P_1 = P_2 = \frac{\pi d^2}{4} p$$

Полное давленіе P равно, очевидно, $P = 2 P_1 \sin \alpha/2$

16. **Разсмотримъ еще случай давленія на погруженное въ жидкость тѣло** A **(фиг. 19).**


Фиг. 18.

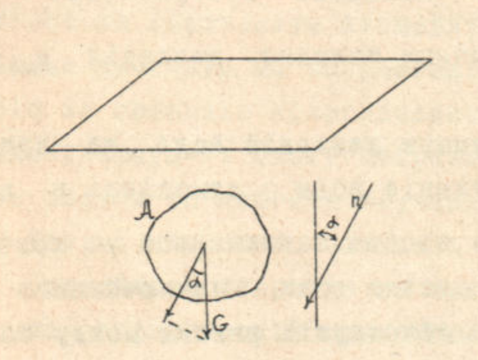


Для опредѣленія давленія примѣнимъ такъ называемый принципъ отвердѣнія. Разсмотримъ равновѣсіе тѣла, одинаковаго съ разсматриваемымъ, но заполненнаго жидкостью. Очевидно, въ случаѣ равновѣсія всей массы жидкости и каждый отсѣкъ ея также находится въ равновѣсіи; отсѣ-

да непосредственно слѣдуетъ, что давленіе на тѣло уравновѣшиваетъ его вѣсъ. Такимъ образомъ, получаемъ, что составляющая давленія жидкости на погруженное тѣло по какому либо направленію n равна по величинѣ проекціи на то же направленіе вѣса жидкости, равнаго съ тѣломъ объема, по направленію же прямо противоположному вѣсу.

Если за направленіе n взять направленіе вертикальное, то непосредственно получаемъ извѣстный законъ Архимеда; для горизонтальнаго направленія имѣемъ давленіе нуль. Отсюда также ясно слѣдуетъ, что если давленіе во всей массѣ жидкости одинаково, то давленіе ея на погруженное тѣло равно нулю.

Фиг. 19.

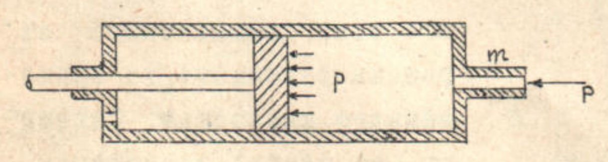


Мы не разсматриваемъ здѣсь вопросовъ равновѣсія плавающихъ тѣлъ, такъ какъ они излагаются въ спеціальномъ курсѣ "Энциклопедіи Судостроенія".

17. *Машины, дѣйствующія давленіемъ воды.*

Подъ таковыми мы разумѣемъ различные механизмы, основною частью которыхъ являются гидравлическій цилиндръ (фиг. 20), на который давитъ поступающая черезъ трубку m жидкость подъ давленіемъ p. Гидравлическій цилиндръ является основой всякаго рода гидравлическихъ подъемниковъ, гидравлическихъ ударныхъ и водостолбовыхъ машинъ, аккумуляторовъ, прессовъ и пр. Мы не можемъ здѣсь входить въ подробное описаніе всѣхъ подобнаго ро-

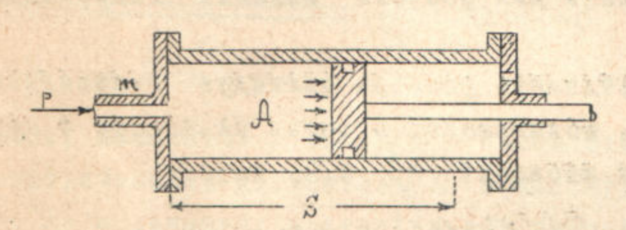
Фиг. 20.



да механизмовъ*), до сихъ поръ имѣющихъ еще достаточно широкое примѣненіе тамъ, гдѣ необходимо либо развивать значительныя сосредоточенныя усилія, либо передавать на разстоянія отдѣльныя и притомъ "точныя" перемѣщенія; мы ограничимся здѣсь лишь выводомъ нѣкоторыхъ общихъ соотношеній, имѣющихъ примѣненіе при оцѣнкѣ и расчетѣ всякихъ подобныхъ гидравлическихъ машинъ.

Пусть въ полости А (фиг. 21) гидравлическаго цилиндра имѣется жидкость подъ манометрическимъ давленіемъ p_m. "Манометрическимъ" называютъ избыточное (противъ атмосфернаго) давленіе въ жидкости, замкнутой въ сосудѣ. Это давленіе непосредственно измѣряется обычнымъ манометромъ. (Бурдона и пр.).

Фиг. 21.



Пусть рабочая площадь поршня F; его ходъ S

Работа совершаемая поршнемъ за одинъ ходъ:

$$A = pFS = pW \quad (15)$$

гдѣ W полезный объемъ, занимаемый жидкостью или "полезная емкость цилиндра". Такимъ образомъ мы видимъ, что работа, которую можетъ совершить гидравлическій цилиндръ, равна произведенію его емкости на величину давленія рабочей жидкости.

Если мы будемъ выражать давленіе p въ атмосферахъ $\left(\frac{\text{килг.}}{\text{сант.}^2}\right)$, объемъ въ литрахъ (куб. дециметрахъ), а работу А въ килогр. метрахъ, то получимъ слѣдующее численное соотношеніе (приводя все къ метрамъ, килограммамъ и дециметрамъ)

$$10A = W \cdot 100p\ ;\ A_{kg/mt} = 10pW \quad (15^*)$$

Такимъ образомъ цилиндръ, емкостью въ одинъ литръ, подъ

---

*) См. Blaine Hydraulic Machinery. Lea. Collier и пр.

давленіемъ въ одну атмосферу даетъ 10 килгр.метровъ работы.

Само собою очевидно, что носительницей энергіи является на самомъ дѣлѣ лишь жидкость подъ давленіемъ, и что формула (15*) выражаетъ лишь то, что можетъ быть названо работоемкостью жидкости. Одинъ литръ жидкости сдавленный до p атмосферъ, содержитъ въ себѣ $10 \cdot p$ кил.метр. энергіи.

Очевидно, что формула (15*) выражаетъ работу сжатой жидкости, переданную поршню и не учитываетъ потерь. Дѣйствительная работа, которая можетъ быть получена отъ поршня выражается соотношеніемъ:

$$A_{eff} = \eta A = \eta \cdot 10pW \qquad . \quad . \quad . \quad (15^{**})$$

гдѣ η коэффиціентъ полезнаго дѣйствія цилиндра.

Формула (15**) и служитъ для расчета всякихъ гидравлическихъ цилиндровъ.

Примѣръ 1: Опредѣлить размѣръ цилиндра гидравлическаго подъемнаго крана, подымающаго 5 тоннъ на высоту 4 метр.; $p = 50$ атм. Задавая съ запасомъ $\eta = 0{,}8$, имѣемъ

$$W = \frac{5000 \times 4}{10.50.0{,}8} = 50 \text{ litr}$$

Размѣры S и F могутъ быть выбраны по желанію.

2. Опредѣлить полезный объемъ гидравлическаго аккумулятора, работоемкостью въ 180000 кил.м. при $p = 100$ кл./сант.^{2} и $\eta = 0{,}9$.

$$W = \frac{180000}{10.100.0{,}9} = 200 \text{ litr.}$$

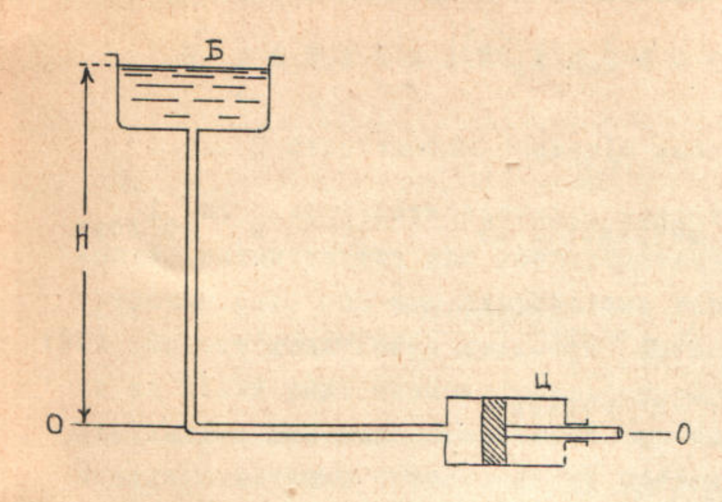
Для пониманія того, какимъ образомъ несжимаемая жидкость можетъ явиться носительницей энергіи укажемъ, что на самомъ дѣлѣ жидкость является здѣсь лишь передатчикомъ давленія. Такъ въ схемѣ (фиг.22) вода, поступающая въ рабочій гидравлическій цилиндръ, подается по трубкѣ m нассомъ H, для перемѣщенія поршня котораго требуется усиліе Q.

Фиг. 22.

Въ схемѣ (ф. 23) рабочій цилиндръ соединенъ съ водонапорнымъ бакомъ $Б$, находящимся на вы-

сотѣ H надъ центромъ цилиндра, соотвѣтствующей давленію p, т.е. $H = \frac{p}{\gamma}$

Фиг. 23.



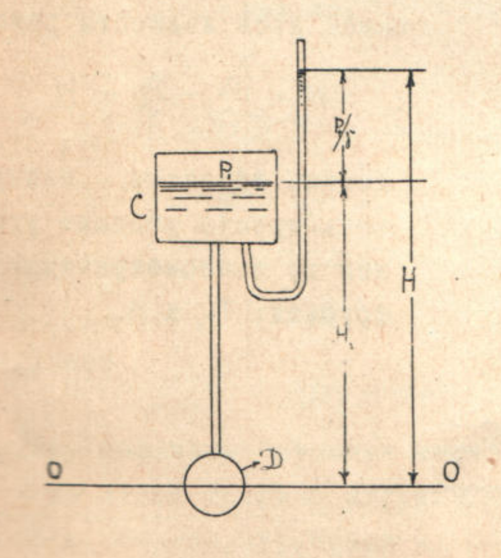
Объемъ воды , входящій въ цилиндръ, падаетъ съ поверхности воды въ бакѣ, т.е. совершаетъ работу

$$A = W\gamma H = Wp$$

что тождественно съ формулой 15.

Изъ этого между прочимъ слѣдуетъ, что нѣкоторый объемъ жидкости, скажемъ W, вѣса γW, находящійся въ цилиндрѣ подъ манометрическимъ давленіемъ p (фиг.23), содержитъ въ себѣ такое же количество потенціальной энергіи по отношенію къ горизонтальной плоскости OO, какъ если бы этотъ же объемъ находился въ открытомъ бакѣ на высотѣ $H = \frac{p}{\gamma}$ и могъ бы падая совершить работу γHW.

Фиг. 24.



Такимъ образомъ, по отношенію къ плоскости OO, потенціальная энергія заключенная въ единицѣ вѣса жидкости, находящейся подъ давленіемъ p_1 въ сосудѣ С (фиг.24) будетъ:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} = H$$

гдѣ H есть сумма геометрической высоты H_1 и пьезометрической $\frac{p_1}{\gamma}$.

Величину H будемъ называть *напоромъ* по отношенію къ плоскости $O-O$.

Работоемкость объема жидкости по отношенію къ плоскости $O-O$ равна γWH

$\gamma W H$.

произведенію вѣса на напоръ.

При расходованіи въ двигателѣ въ единицу времени объема жидкости Q постоянная мощность, подводимая къ двигателю есть

$$N_{abs} = \gamma Q H$$

его полезная мощность

$$N_{eff} = \eta \gamma Q H$$

Если измѣрять H въ метрахъ; Q въ $\frac{\text{куб. метр.}}{\text{сек.}}$ и N въ лошадиныхъ силахъ, то

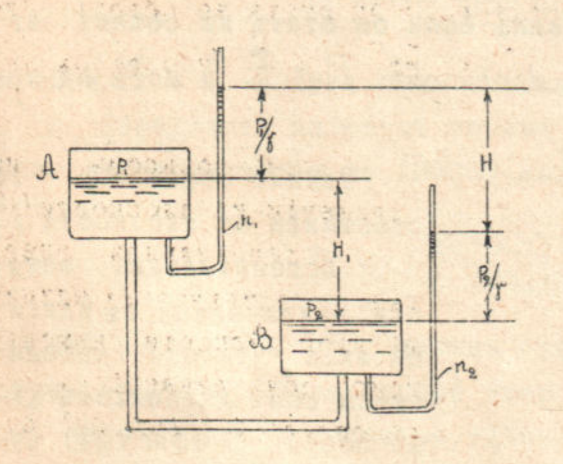
$$N_{eff} = \eta \frac{1000 Q H}{75} \text{ лош. силъ} \tag{16}$$

Принимая въ среднемъ $\eta = 0.75$ имѣемъ:

$$N_{eff} = 10 Q H \text{ лош. силъ}$$

формулу широко употребляемую для предварительныхъ расчетовъ въ устройствахъ, использующихъ энергію паденія воды.

Фиг. 25.



При расходованіи жидкости между сосудами A и B съ геометрической разностью уровней H_1 и давленіями соотвѣтственно p_1 и p_2 работа, совершаемая единицей вѣса жидкости равна

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = H$$

Такимъ образомъ, напоръ есть просто разница уровней въ пьезометрическихъ трубкахъ n_1 и n_2.

Глава II.

О ДВИЖЕНІИ ЖИДКОСТИ ВООБЩЕ.

18. *О струйчатомъ движеніи жидкости.*

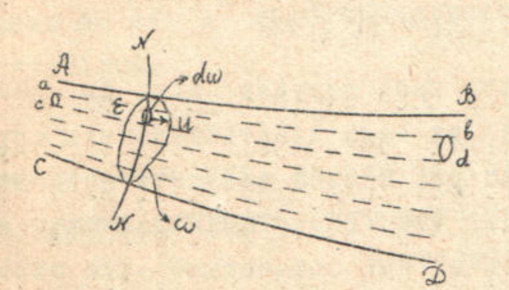
1. Въ основѣ естественныхъ представленій о движеніи жидкости, возникающихъ изъ непосредственнаго наблюденія, лежитъ представленіе объ его струйчатомъ характерѣ.

Потокъ движущейся жидкости (фиг. 26) мысленно разбивается на цѣлый рядъ элементарныхъ струй - трубокъ (ab-cd и пр.); ось каждой изъ нихъ касательна къ направленію скорости; оси соотвѣтственныхъ трубокъ-струй представляютъ изъ себя тѣмъ самымъ траекторіи движущихся частицъ.

Очевидно, поверхность раздѣляющую подобныя мысленныя трубки можно было бы замѣнить безконечно тонкой жесткой непроницаемой стѣнкой безъ того, чтобы что либо въ движеніи измѣнилось.

Выдѣлимъ въ точкѣ А (фиг.27) движущейся жидкости элементарную площадку dF. Пусть направленіе скорости u жидкости въ этой точкѣ составляетъ съ нормалью n къ площадкѣ уголъ α.

Фиг. 26.



Фиг. 27.



Величину

$$dq = dF\,u\,Cos\alpha = u_n dF$$

будемъ называть потокомъ черезъ площадку dF въ точкѣ А.

Въ любой точкѣ ε струйки $abcd$ (фиг.26) проведемъ плоскость, перпендикулярную къ оси струйки; сѣченіе струйки такою плоскостью назовемъ "живымъ сѣченіемъ струйки"; величину площади его обозначимъ $d\omega$.

Такъ какъ скорость перпендикулярна къ живому сѣченію,

то соответственный потокъ равенъ $ud\omega$; очевидно, въ то же самое время, потокъ через любой элементъ стѣнки струйки равенъ нулю.

Исходя изъ точки $\mathcal{E}$ построимъ поверхность $N-N_1$ ортогональную къ направленію струй, т. е. поверхность, каждый элементъ которой въ любой точкѣ перпендикуляренъ къ направленію соответственной струи.

Поверхность эту назовемъ "живымъ сѣченіемъ" потока въ точкѣ $\mathcal{E}$ *). Величину площади этой поверхности

$$\omega = \int_\omega d\omega$$

(предполагая, что интегралъ взятъ въ предѣлахъ всего потока) назовемъ "площадью живого сѣченія" потока въ точкѣ $\mathcal{E}$.

Полный потокъ или, какъ его обычно называютъ въ гидравликѣ, "расходъ" жидкости равный объему протекающей въ единицу времени через данное живое сѣченіе жидкости, очевидно, будетъ равенъ

$$Q_\varepsilon = \int_\omega u d\omega$$

Величину

$$U = \frac{Q_\varepsilon}{\omega} = \frac{\int_\omega u d\omega}{\int_\omega d\omega} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

назовемъ средней скоростью въ сѣченіи

Очевидно, что

$$Q = U \cdot \omega$$

Пока что мы представили себѣ струйки, какъ бы дѣйствительно существующими, т.е. въ видѣ дѣйствительныхъ трубокъ, характеризуемыхъ тѣмъ, что ось каждой изъ нихъ есть дѣйствительная траекторія частицъ, что разъ попавшая въ данную трубку частица продолжаетъ въ ней оставаться, что обмѣна частицами через стѣнки между сосѣдними трубками не существуетъ. Какъ мы увидимъ ниже такому представленію соответствуетъ въ дѣйствительности лишь небольшое число реальныхъ движеній. Въ огромномъ большинствѣ случаевъ, почти во всѣхъ, представляющихъ практическій интересъ, движеніе молекулъ не связано съ опредѣленной траекторіей-трубкой. Между струйками существуетъ непрерывный обмѣнъ частицъ.

---

*) *Ясно, что через каждую точку можно провести одно и только одно живое сѣченіе.*

Тѣмъ не менѣе, какъ мы увидимъ ниже, струйка можетъ продолжать существовать, но уже не какъ дѣйствительная трубка, а какъ нѣкоторая математическая фикція, представляющая средній "статистическій" результатъ дѣйствительныхъ движеній.

Представленіе о "струйчатомъ" движеніи жидкости лежитъ въ основѣ гидравлики съ самаго начала ея возникновенія; съ этимъ представленіемъ связано все развитіе науки; отказъ отъ "струйчатой модели" (изъ предыдущаго ясно, что теперь о струйчатомъ движеніи можно говорить уже лишь какъ о "модели") былъ бы равносиленъ въ настоящій моментъ полному крушенію практической гидравлики, такъ какъ внѣ этой модели пока еще не существуетъ пріемовъ разсмотрѣнія, которые давали бы реальные результаты и приводили къ возможности конкретныхъ рѣшеній вопросовъ.

Одной изъ огромныхъ заслугъ Boussinesq'а (о работахъ котораго мы неоднократно будемъ говорить впереди) служитъ между прочимъ то, что въ своей "Теоріи водныхъ теченій"*), показавъ возможность оперировать надъ фиктивной "статистической" струйкой какъ надъ реальной, онъ тѣмъ самымъ далъ возможность гидравликѣ сохранить накопленные годами долгой работы результаты и пока что примирилъ "старую" теорію съ новыми представленіями о движеніи жидкости.

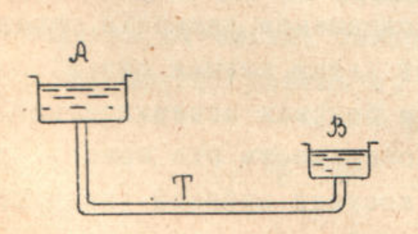
Мы въ дальнѣйшемъ вернемся еще къ этому вопросу; пока же въ послѣдующемъ будемъ пользоваться "струйчатой моделью", какъ если бы она въ дѣйствительности соотвѣтствовала реальнымъ явленіямъ.

19. Терминологія.

Прежде чѣмъ итти дальше, установимъ нѣкоторые термины.

Мы будемъ называть *"установившимся"* такое движеніе, въ которомъ элементы движенія въ какой либо опредѣленной точкѣ не измѣняются по времени. Установившимся движеніемъ будетъ, напримѣръ, движеніе въ трубѣ T (фиг.28), соединяющей два водоема A и B съ постоянными горизонтами воды; или истече-

Фиг.28.



---

*) "Théorie des eaux courantes". Mem. Ac. 1873.

ніе жидкости черезъ отверстіе подъ постояннымъ напоромъ и пр.

Очевидно, что въ случаѣ установившагося движенія всѣ трубки-струи постоянно сохраняютъ свое положеніе, форму и величину. Въ каждой точкѣ движущейся жидкости величина и направленіе скорости остаются неизмѣнными. Остается неизмѣнной также и величина давленія. Такимъ образомомъ въ установившемся движеніи скорости, ускоренія и давленія являются лишь функціями координатъ. Обратно, *"неустановившимся"* или *"перемѣннымъ"* мы будемъ называть движеніе, въ которомъ элементы движенія (скорости, ускоренія и давленія) измѣняются по времени.

Въ неустановившемся движеніи трубки-струи мѣняютъ свое положеніе, форму и величину. Элементы движенія являются функціями, какъ координатъ, такъ и времени. Примѣромъ такого движенія можетъ служить волна на поверхности какого либо водоема.

Необходимо далѣе различать *"равномѣрное"* и *"неравномѣрное"* движеніе.

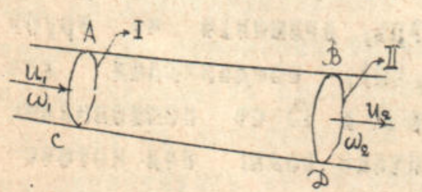
"Равномѣрнымъ" называется такое движеніе, въ которомъ какъ живыя сѣченія, такъ и скорости и ускоренія въ одинаковыхъ точкахъ живыхъ сѣченій одинаковы. "Равномѣрнымъ" будетъ, напримѣръ, движеніе въ цилиндрической трубѣ или въ каналѣ одинаковаго сѣченія при постоянной глубинѣ и въ разстояніи достаточномъ отъ начала трубы или канала, чтобы установилось распредѣленіе скоростей.

Наоборотъ, *"неравномѣрнымъ"* будетъ называться движеніе, въ которомъ измѣняется либо величина живого сѣченія, либо распредѣленіе по одинаковому живому сѣченію скоростей и ускореній. Первое имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ конической (сходящейся или расходящейся) трубѣ, второе - хотя бы въ цилиндрической трубѣ въ начальныхъ ея сѣченіяхъ.

Начало непрерывности:

Представимъ себѣ элементъ ABCD потока, находящагося въ установившемся движеніи, ограниченный двумя живыми сѣченіями I и II и боковою поверхностью ABCD.

Фиг. 29.



Поверхность эта можетъ быть либо жесткой стѣнкой (напр. стѣнка трубы), либо свободной поверхностью раздѣла двухъ разнородныхъ жидкостей (струя въ воздухѣ), наконецъ, просто нѣкоторой мысленной поверхностью, проведенной въ средѣ жидкости.

Важно лишь, чтобы она "обертывала" извѣстную совокупность струй, т.е. чтобы поверхность эта была всюду касательна къ струямъ. Замѣтимъ еще, что въ силу опредѣленія "установившагося" движенія поверхность эта остается неизмѣнной.

Въ промежутокъ времени Δt объемъ жидкости, вошедшій черезъ сѣченіе I въ разсматриваемый отсѣкъ, равенъ

$$\omega_1 u_1 \Delta t$$

объемъ вытекшій черезъ сѣченіе II

$$\omega_2 u_2 \Delta t$$

Въ силу несжимаемости жидкости разность

$$\omega_1 u_1 \Delta t - \omega_2 u_2 \Delta t = 0 \quad . \; . \; . \quad (I)$$

Такимъ образомъ, въ установившемся движеніи

$$\omega_1 u_1 = \omega_2 u_2 = Q \; ; \; \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{u_2}{u_1} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

т.е. расходъ черезъ любое сѣченіе потока или струи постояненъ и скорости обратно пропорціональны площадямъ сѣченій. Уравненіе (18) представляетъ изъ себя одно изъ наиболѣе важныхъ соотношеній гидравлики и носитъ названіе "уравненія или условія непрерывности"; оно является непосредственнымъ слѣдствіемъ представленія о "непрерывномъ заполненіи и объ отсутствіи пустотъ въ занимаемомъ жидкостью пространствѣ".

Въ случаѣ неустановившагося движенія разность (въ данный моментъ) втекающихъ и вытекающихъ черезъ сѣченія I и II объемовъ жидкости должна пойти на увеличеніе объема отсѣка, т.е. при постоянной его длинѣ, на раздвиженіи стѣнокъ. Очевидно, вмѣсто (I) имѣемъ

$$(\omega_1 u_1 - \omega_2 u_2)\Delta t = \Delta W \quad \text{или} \quad (q_1 - q_2)\Delta t = \Delta W$$

гдѣ ΔW увеличеніе объема отсѣка.

Переходя къ сѣченіямъ безконечно близкимъ (на разстояніи ΔS другъ отъ друга) имѣемъ въ предѣлѣ:

$$q_1 - q_2 = -\frac{\partial q}{\partial s} ds$$

$$\Delta W = ds \frac{\partial \omega}{\partial t} dt$$

Такимъ образомъ, уравненіе непрерывности принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

20. Уравненіе Бернулли.

Однимъ изъ наиболѣе важныхъ орудій гидравлики является соотношеніе, получаемое примѣненіемъ къ струйкѣ движущейся жидкости начала живыхъ силъ.

Въ примѣненіи къ установившемуся движенію тяжелой жидкости соотношеніе это называется обыкновенно уравненіемъ Даніила Бернулли. Выведемъ его пока для случая установившагося движенія идеальной жидкости. Будемъ разсматривать элементарную струйку определяемую осью $S-S$ (фиг.30); разсмотримъ элементарное перемѣщеніе за промежутокъ времени Δt части струйки, заключенной между сѣченіями 1 и 2, изъ положенія AB въ $A'B'$.

Индексами 1 и 2 будемъ отмѣчать величины относящіяся къ соотвѣтственнымъ сѣченіямъ.

Перемѣщенія $\Delta S_1 = AA'$ и $\Delta S_2 = BB'$ очевидно, соотвѣтственно равны

$$\Delta S_1 = u_1 \Delta t \quad ; \quad \Delta S_2 = u_2 \Delta t$$

Въ силу начала непрерывности

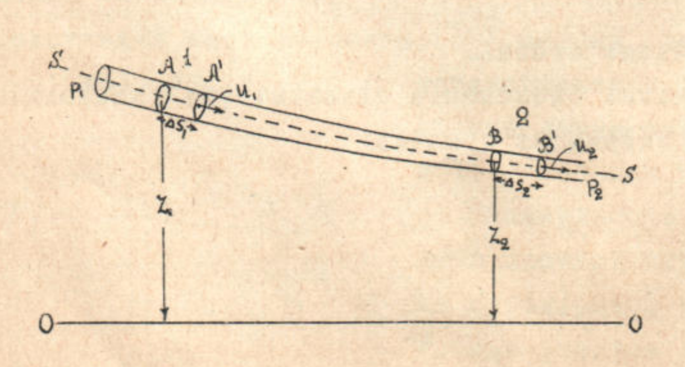
$$q = \omega_1 u_1 = \omega_2 u_2$$

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Очевидно, также равны между собою и объемы AA' и BB':

$$q = \omega_1 u_1 \Delta t = \omega_2 u_2 \Delta t$$

Фиг. 30.



Примѣнимъ теперь законъ живыхъ силъ. Измѣненіе живой силы равно лишь разности живыхъ силъ, заключенныхъ въ объемы BB' и AA', такъ какъ въ силу установившагося движенія, жи-

вая сила массы, заключенной въ отрѣзкѣ $A'B$ не измѣнилась.

Такимъ образомъ, измѣненіе живой силы равно

$$\frac{\gamma}{g} q \Delta t \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}\right)$$

Работа силъ складывается изъ:

1) работы силъ тяжести равной

$$\gamma q \Delta t (z_1 - z_2)$$

гдѣ z разстояніе до центровъ тяжести соотвѣтствующихъ сѣченій отъ нѣкоторой горизонтальной плоскости 0 - 0,

2) работы давленій; въ выраженіе послѣдней, очевидно, входятъ лишь работы давленій въ сѣченіяхъ ω_1 и ω_2, такъ какъ давленія на боковыя стѣнки струйки перпендикулярны къ перемѣщеніямъ и, слѣдовательно, работы ихъ равны нулю. Тѣмъ самымъ работа давленій выразится

$$p_1\omega_1\Delta s_1 - p_2\omega_2\Delta s_2 = p_1\omega_1 u_1 \Delta t - p_2\omega_2 u_2 \Delta t = q\Delta t (p_1 - p_2)$$

Сопоставляя, получаемъ:

$$\gamma q \Delta t \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}\right) = \gamma q \Delta t (z_1 - z_2) + q \Delta t (p_1 - p_2) \qquad (II)$$

Дѣля на $\gamma q \Delta t$ и разнося члены съ одинаковыми индексами въ соотвѣтственныя стороны, имѣемъ:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \qquad (III)$$

или, такъ какъ мы ничѣмъ не ограничивали выбора нашихъ сѣченій, то

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = Const \qquad (19)$$

Уравненіе (19) можно написать въ дифференціальной формѣ:

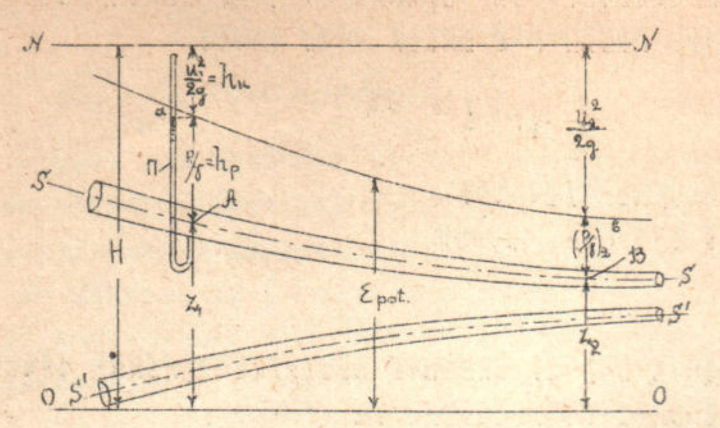
$$\frac{dz}{ds} + \frac{dp}{\gamma ds} + \frac{u du}{2g ds} = 0 \qquad (19^{bis})$$

Всѣ члены лѣвой части уравненія (19) имѣютъ измѣреніе длины (фиг.31).

1) z измѣряетъ, какъ выше было указано, высоту точки A надъ горизонтальной плоскостью 0 - 0;

2) $\frac{p}{\gamma} = h_p$ есть величина пьезометрическаго давленія: она измѣряетъ высоту столба жидкости въ пьезометрѣ П .

Фиг. 31.



3) Величина $\frac{u^2}{2g}$ есть нѣкоторая высота h_u, падая съ которой въ средѣ лишенной сопротивленія, тѣло пріобрѣтаетъ скорость u. Величину $h_u = \frac{u^2}{2g}$ будемъ называть *"скоростнымъ напоромъ"*.

Сумма этихъ трехъ высотъ, взятыхъ для любой точки вдоль струи, есть величина постоянная, есть нѣкоторая высота H.

Физическое значенiе этой постоянной уясняется изъ слѣдующаго. Уравненіе (19) получается дѣленіемъ соотношенія (II) на $\gamma q \Delta t$, т.е. на вѣсъ объема $q\Delta t$.

Въ уравненіи (II) отдѣльные члены въ то же самое время представляютъ изъ себя выраженія энергіи заключенной въ объемѣ $q\Delta t$, или работъ отнесенныхъ къ вѣсу жидкости, заключенной въ $q\Delta t$.

Ясно, что въ уравненіи (19) отдѣльные члены представляютъ собой величины энергіи, отнесенныя къ единицѣ вѣса, протекающей жидкости. Величину энергіи, заключающейся въ единицѣ вѣса будемъ всюду въ послѣдующемъ называть *"удѣльной энергіей"*.

Уравненіе (19), являющееся, очевидно, выраженіемъ закона сохраненія энергіи, гласитъ, что полная удѣльная энергія заключающаяся въ протекающей жидкости по отношенію къ плоскости 0 - 0 состоитъ изъ трехъ частей:

1) Удѣльная энергія положенія, чему соотвѣтствуетъ высота z.

2) Удѣльная энергія давленія, чему соотвѣтствуетъ высота $h_p = \frac{p}{\gamma}$.

3) Удѣльная кинетическая энергія, чему соотвѣтствуетъ высота $h_u = \frac{u^2}{2g}$.

Выше въ отдѣлѣ о простыхъ гидравлическихъ машинахъ мы указали, что энергію, заключенную въ нѣкоторомъ объемѣ жидкости, можно измѣрять произведеніемъ вѣса жидкости на нѣкоторую высоту, которую мы назвали напоромъ (см. стр.35).

Въ разсматриваемомъ случаѣ напоръ, измѣряющій величину удѣльной потенціальной энергіи равенъ, очевидно, $z + \frac{p}{\gamma}$; напоръ, соотвѣтствующій удѣльной кинетической энергіи, $h_k = \frac{u^2}{2g}$. Слѣдовательно, и постоянная въ уравн.(19) есть тоже напоръ H, измѣряющій полную удѣльную энергію, т.е. полную энергію, заключающуюся въ единицѣ вѣса протекающей черезъ струйку жидкости.

Уравненіе (19) $H = const$ опредѣляетъ положеніе нѣкоторой горизонтальной плоскости $N-N$, которую называютъ обычно *"напорной плоскостью"*.

Ясно, что плоскость $O-O$ мы можемъ вообще назначать какъ угодно. Ее можно даже совершенно не назначать; для характеристики движенія достаточно лишь знать плоскость напора $N-N$.

Отмѣтимъ еще слѣдующее. Если вдоль струи установить (подобно точкѣ А) рядъ пьезометрическихъ трубокъ, уровни жидкости въ нихъ расположатся по линіи $a-b$. Ординаты линіи ab, которую мы будемъ называть пьезометрической линіей или линіей пьезометрическихъ высотъ, относительно плоскости $O-O$ равны:

$$z + \frac{p}{\gamma}$$

Очевидно, линія эта служитъ мѣриломъ потенціальной удѣльной энергіи, заключенной въ жидкости, относительно любой плоскости $O-O$.

Замѣтимъ также, что если мы измѣнимъ положеніе трубки $S-S$ (скажемъ въ $S'-S'$), но такъ, чтобы общее содержаніе энергіи опредѣляемое нѣкоторыми начальными условіями, а также скорости въ трубкѣ не измѣнились, то пьезометрическая линія $a-b$ остается безъ измѣненія. Линія пьезометрическихъ высотъ не измѣнится также, если мы измѣнимъ положеніе плоскости $O-O$. Мы тѣмъ самымъ лишь перенесемъ плоскость сравненія $O-O$ и соотвѣтственно увеличимъ или уменьшимъ мѣру потенціальной энергіи.

Уравненіе (19) играетъ огромную роль въ гидравликѣ. Оно даетъ возможность по двумъ извѣстнымъ элементамъ движенія

струйки (скажемъ z и u) опредѣлить третій (p) и т.д.

Уравненіе называется именемъ Даніила Бернулли по той причинѣ, что послѣдній въ своемъ знаменитомъ сочиненіи "Hydrodinamica" (Strasburg 1738), положившемъ собственно основу современной гидравликѣ, впервые примѣнилъ законъ живыхъ силъ къ рѣшенію гидравлическихъ вопросовъ и въ частности рѣшилъ, пользуясь имъ, основной вопросъ о нахожденіи величины давленія внутри движущейся жидкости. Въ формѣ (19), однако, уравненіе у самого Бернулли не встрѣчается; эту "классическую" форму придалъ уравненію Эйлеръ (Hist. de l'Ac. de Berlin 1755).

21. *Значеніе уравненія Бернулли въ гидравликѣ* заставляетъ насъ привести выводъ его и другимъ путемъ, а именно, непосредственно изъ основного уравненія движенія, подобно тому, какъ вообще говоря, законъ живыхъ силъ выводится изъ основныхъ уравненій динамики.

Составимъ уравненіе движенія для элемента струйки длиною ds (фиг.32).

Масса элемента $m = \frac{\gamma}{g} d\omega \cdot ds$

Дѣйствующія въ направленіи оси силы:

а) составляющая силы тяжести $\gamma\, d\omega\, ds \sin\varphi$

б) разность давленій на сѣченія $d\omega[p-(p+dp)]$

Фиг. 32.

Принимая во вниманіе, что

$\sin\varphi = -\frac{dz}{ds}$ получаемъ

$$d\omega ds \frac{\gamma}{g}\frac{du}{dt} = -d\omega ds\,\gamma\frac{dz}{ds} - d\omega dp \qquad (*)$$

Такъ какъ въ случаѣ установившагося движенія

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt} = u\frac{du}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

то уравненіе (*) превращается по раздѣленіи на $d\omega\gamma$.

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) + dz + \frac{dp}{\gamma} = 0$$

или

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}$$

22. *Для иллюстрацiи уравненiя Бернулли* приведемъ нѣсколько примѣровъ.

а) Движенiе въ цилиндрической трубкѣ A-B (фиг. 33). Такъ какъ скорость всюду одинакова, то, очевидно, $z + h_p$ также всюду одинаково. Такимъ образомъ, при движенiи идеальной жидкости по цилиндрической трубкѣ пьезометрическая линiя $p - p$ горизонтальна.

б) Цилиндрическiя трубы A и B (фиг. 34) одинаковаго дiаметра соединяются особою вставкою K-K, сперва конически сходящейся, затѣмъ расходящейся, называя сѣченiя трубы въ A и C ω_1 и ω_2, $k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$; и расходъ воды Q имѣемъ въ силу (19)

Фиг. 33.

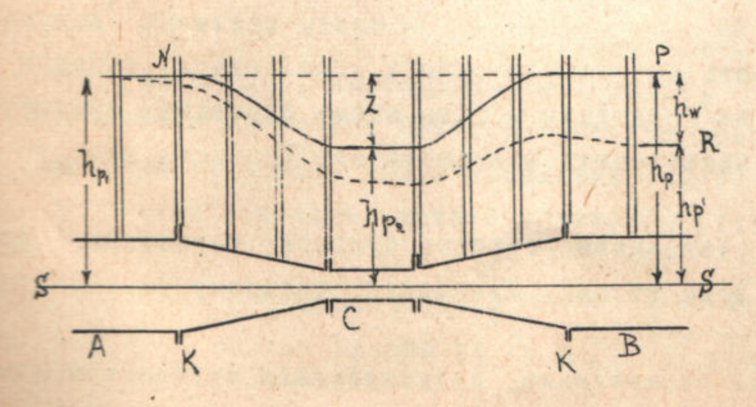
$$h_{p_1} + \frac{u_1^2}{2g} = h_{p_2} + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$h_{p_1} - h_{p_2} = z = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\omega_1^2}\left(\frac{u_2^2}{u_1^2} - 1\right) = Q^2\frac{k^2-1}{2g\omega_1^2}$$

откуда въ свою очередь

$$Q = \omega_1\sqrt{\frac{2gz}{k^2-1}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

Фиг. 34.



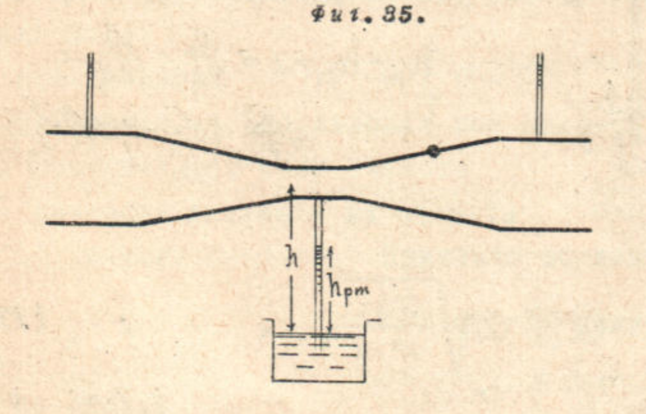
Такимъ образомъ, зная сѣченiе трубы I и коэффицiентъ суженiя горловины K можно по соотношенiю (A) опредѣлить расходъ жидкости по разности пьезометрическихъ давленiй z.

На этомъ основанъ такъ называемый водомѣръ*) Вентури, изобрѣтенный въ 1881 г. американск. инж. К. Гершелемъ. Водомѣръ этотъ нашелъ очень широкое примѣненіе особенно тамъ, гдѣ идетъ дѣло объ измѣреніи значительныхъ количествъ протекающей воды, и гдѣ въ силу именно послѣднихъ обстоятельствъ неудобно примѣнять различные другіе водомѣры со сложными движущимися частями, передачами къ регистраціоннымъ механизмамъ и пр.

Въ силу закона непрерывности скорость въ суженныхъ сѣченіяхъ увеличивается, вмѣстѣ съ тѣмъ падаетъ, въ силу уравненія (19), давленіе. Въ конически сходящейся части происходитъ превращеніе потенціальной энергіи въ кинетическую, въ расходящейся части обратно, кинетическая энергія вновь возстановляется въ потенціальную. Пьезометр. линія p-p пріобрѣтаетъ видъ начерченной кривой, при томъ, очевидно, для идеальной жидкости, движущейся безъ потери энергіи, пьезометрическія высоты h_{p_1} и h_p въ одинаковыхъ трубахъ A и B одинаковы.

При значительномъ суженіи трубы давленіе въ C можетъ стать ниже атмосфернаго; въ такомъ случаѣ (фиг.35) въ пьезометрической трубкѣ p, опущенной въ сосудъ съ жидкостью, послѣдняя будетъ подыматься по трубкѣ и высота столба h_{pm} будетъ измѣрять величину вакуума или недостачу давленія въ C до атмосфернаго. При соотвѣтственномъ соотношеніи величинъ вакуума и высоты h жидкость изъ сосуда будетъ всасываться и непрерывно поступать въ горловину C; на этомъ основанъ принципъ устройства такъ называемыхъ водоструйныхъ насосовъ, инжекторовъ и пр.

Фиг. 35.



Reynolds, увеличивая степень суженія горловины, достигъ того, что вода въ ней, благодаря сильному разрѣженію,

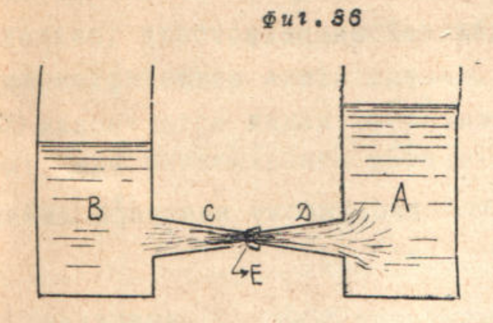
---

*) *Водомѣрами въ практикѣ водоснабженія называются приборы, служащіе для опредѣленія и регистраціи количествъ воды, протекающей черезъ трубы.*

кипѣла при обыкновенной температурѣ.

Крайне интересенъ также опытъ Froude'a, въ которомъ вода переливается изъ сосуда A въ сосудъ B (ф.36) по системѣ коническихъ сходящихся и расходящихся трубъ C и D; сперва сосуды эти устанавливаются такъ, что отверстія трубъ соприкасаются, впослѣдствіи сосуды можно раздвинуть, но это не нарушаетъ явленія и струя частью проходитъ по воздуху.

фиг.36



23. *Введеніе сопротивленій.*

Поставимъ теперь общій вопросъ о томъ, какъ измѣнится уравненіе Бернулли (19), если примѣнить его къ вязкой жидкости, при движеніи которой имѣютъ мѣсто сопротивленія.

Не входя пока еще совершенно въ природу сопротивленій, ни въ ихъ количественную оцѣнку, замѣтимъ лишь, что всякія сопротивленія проявляются во всякомъ случаѣ въ томъ, что благодаря имъ при движеніи происходитъ разсѣяніе энергіи, производится нѣкоторая необратимая работа.

Вернемся къ фиг. 30 и предположимъ, что при перемѣщеніи элемента $Q\Delta t$ изъ положенія AB въ $A'B'$ силы сопротивленія произвели нѣкоторую работу R_w. Работа, какъ мы выше видѣли, можетъ вообще выражаться произведеніемъ вѣса соотвѣтственнаго объема жидкости на нѣкоторый напоръ.

Для объема жидкости $Q\Delta t$, протекающаго черезъ любое сѣченіе трубки (фиг.31) въ теченіе элемента времени Δt, для котораго вообще составлено уравненіе (II), работа силъ сопротивленія на участкѣ $A-B$ можетъ быть выражена черезъ

$$R_w = \gamma Q \Delta t h_w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

гдѣ h_w нѣкоторый, соотвѣтствующій работѣ R_w, напоръ.

Работа R_w должна быть вычтена изъ работы силъ тяжести и давленій въ правой части уравненія (II).

Такимъ образомъ, вмѣсто уравненія (III) получимъ

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} - h_w \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

и называя полные напоры въ A и B H_1 и H_2

$$H_1 - H_2 = h_w$$

Въ дифференціальной формѣ уравненіе (20) получитъ видъ

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma}\frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -\frac{dh_w}{ds}$$

или называя E величину удѣльной энергіи

$$\frac{dE}{ds} = -\frac{dh_w}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Величина $\frac{dh_w}{ds}$ равна, очевидно, уклону напорной линіи $i_н$ въ данномъ сѣченіи;

$$\frac{dE}{ds} = -\frac{dh_w}{ds} = -i_н \quad . \quad . \quad . \quad (C')$$

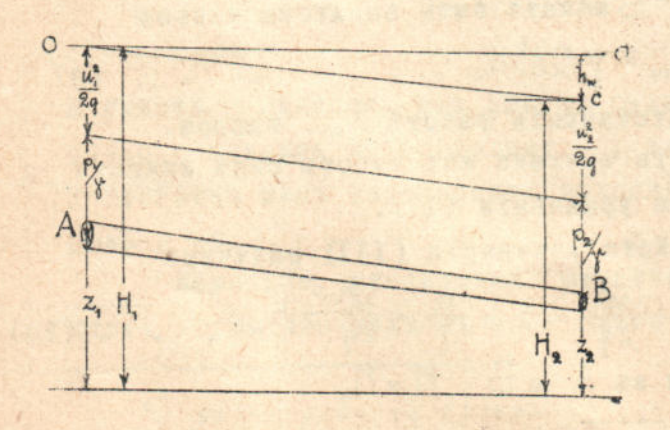
Такимъ образомъ, происходящее, благодаря наличію сопротивленія разсѣяніе энергіи выражается въ *потерѣ напора.*

Сумма

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

уже не будетъ оставаться постоянной и не будетъ изображать "напорную плоскость" (O — O) (фиг.37), а будетъ вдоль теченія уменьшаться и соотвѣтствовать нѣкоторой кривой O — C отклоненіе которой отъ прямой O—O въ точкѣ B измѣряетъ потерю напора на участкѣ АБ.

Фиг. 37.



Подобно тому, какъ всѣ члены ур-нія (19) изображаютъ мѣру соотвѣтственныхъ "удѣльныхъ энергій", такъ и величина h_w служитъ мѣриломъ энергіи, потерянной единицей вѣса жидкости на опредѣленномъ участкѣ трубки.

Помножая h_w, на γQ вѣсъ жидкости протекающей черезъ любое сѣченіе въ единицу времени, получаемъ, *работу* силъ сопротивленія въ единицу времени, т.е. мощность

силъ сопротивленія на опредѣленномъ участкѣ.

Въ частности при движеніи вязкой жидкости по цилиндрической трубкѣ (фиг.33) пьезометрическая линія вмѣсто того, чтобы быть горизонтальной, дѣлается наклонной $(P-R)$.

Дѣйствительно, благодаря цилиндричности трубы, потеря напора одинакова для участковъ трубы одинаковой длины и слѣдовательно, просто пропорціональна длинѣ трубы, въ силу чего пьезометрическая линія прямая.

Уклонъ этой линіи i_p называется пьезометрическимъ уклономъ; для равномѣрнаго движенія потеря на нѣкоторомъ участкѣ длины L *):

$$h_w = L \sin\alpha = i_p L$$

Величина $i_p = \sin\alpha$ опредѣляетъ работу сопротивленій, отнесенную къ единицѣ вѣса жидкости, на единицѣ длины.

Величина $\gamma i_p Q$ есть, очевидно, мощность силъ сопротивленія на единицѣ длины.

На фиг. 34 линія NR также изображаетъ дѣйствительную пьезометрическую линію, причемъ разность ординатъ идеальной (NP) и дѣйствительной (NR) линіи измѣряетъ потерю напора на участкѣ отъ N до соотвѣтственной точки.

24. *Уравненіе Бернулли для цѣлаго потока.*

Въ предыдущемъ уравненіе (19) мы вывели лишь для отдѣльной элементарной струйки. Между тѣмъ, при рѣшеніи практическихъ вопросовъ о движеніи жидкостей намъ обычно приходится имѣть дѣло съ потоками конечныхъ размѣровъ.

Для рѣшенія подобныхъ вопросовъ Bernoulli и D'Alambert пользовались, такъ называемой моделью "плоскихъ сѣченій" другими словами, дѣйствительное движеніе жидкости они замѣнили фиктивнымъ, у котораго (фиг.38) всѣ частицы въ нѣкоторомъ сѣченіи AB имѣютъ одинаковыя скорости, равныя "средней скорости"

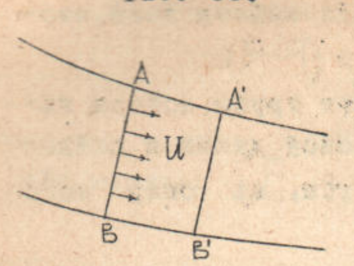
$$u = \frac{Q}{\omega}$$

---

*) *для случая равномѣрнаго движенія (т.к. $\frac{d}{ds}\left(\frac{u^2}{2g}\right) = 0$) очевидно $i_p = i_н$, т.е. пьезометрическій уклонъ равновеликъ съ уклономъ напорной линіи, такимъ образомъ (см. С') $\frac{dE}{ds} = -i_p$*

Тѣмъ самымъ всѣ точки даннаго сѣченія перемѣщаются одинаково и сѣченіе AB переходитъ въ $A'B'$ сохраняя плоскій видъ.

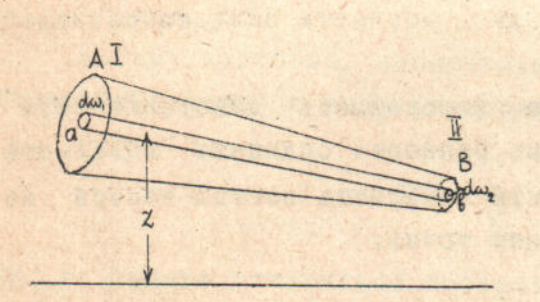
фиг. 38.



И до настоящаго времени во многихъ курсахъ сохраняется эта модель плоскихъ сѣченій. На самомъ же дѣлѣ она вовсе не нужна. Какъ показалъ еще Coriolis (1836) въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ уравненіе живыхъ силъ, примѣненное къ цѣлому потоку непосредственно приводитъ къ выраженію, подобному (19). Тамъ же, гдѣ такое приведеніе не можетъ быть сдѣлано, не можетъ ничего дать, какъ мы увидимъ ниже, и гипотеза плоскихъ сѣченій.

Разсмотримъ потокъ конечныхъ размѣровъ AB, находящійся въ установившемся движеніи (фиг.39). Для отдѣльной его струйки $a-b$ сѣченія (въ A и B) $d\omega_1$ и $d\omega_2$ мы составили уравненіе живыхъ силъ въ формѣ (II); добавляя членъ, зависящій отъ потерь и сокращая на Δt, получимъ

фиг. 39.



$$\gamma q\frac{u_2^2}{2g} + \gamma q\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \gamma q\frac{u_1^2}{2g} + \gamma q\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - R_n$$

Мы можемъ составить подобныя выраженія для всѣхъ отдѣльныхъ струекъ и сложить ихъ; тѣмъ самымъ получимъ уравненія живыхъ силъ для всего потока.

Произведемъ подобную операцію почленно.

I) $\int_{\omega_1}\gamma q\frac{u_1^2}{2g}$ и $\int_{\omega_2}\gamma q\frac{u_2^2}{2g}$ представляетъ, очевидно, изъ себя выраженіе живой силы всей массы жидкости, протекающей въ единицу времени черезъ сѣченія I и II. Выраженія эти, принимая во вниманіе, что $q = u\,d\omega$, преобразовываются слѣдующимъ образомъ:

$$\int_\omega \gamma q \frac{u_1^2}{2g} = \frac{\gamma}{2g}\int_\omega u^3 d\omega = \frac{\gamma}{2g}\alpha U^3\omega = \alpha \frac{\gamma U^2}{2g} U\omega = \alpha\gamma Q \frac{U^2}{2g} \qquad (21)$$

гдѣ ω площадь всего сѣченія; U есть средняя скорость по сѣченію, а α есть численный коэффиціентъ.

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{U^3\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

измѣряющій, какъ видно изъ сопоставленія перваго и послѣдняго члена выраженія (21), отношеніе дѣйствительной живой силы, заключающейся въ массѣ протекающей черезъ данное сѣченіе въ единицу времени жидкости, къ живой силѣ, которая имѣла бы мѣсто при томъ же расходѣ $Q = \int u d\omega = U\omega$, если бы всѣ частицы въ сѣченіи обладали одинаковыми скоростями, равными средней.

Такимъ образомъ, уравненіе (21) даетъ возможность выражать измѣненіе живой силы въ сѣченіяхъ I и II черезъ измѣненіе среднихъ скоростей, т. е.

$$\int_{\omega_2} \gamma q \frac{u_2^2}{2g} - \int_{\omega_1} \gamma q \frac{u_1^2}{2g} = \gamma Q\left(\frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g}\right)$$

Какъ легко показать, величина α всегда больше единицы Пусть дѣйствительно. (фиг.40) кривая AB изображаетъ истинное распредѣленіе скоростей по сѣченію. прямая же CD соотвѣтствуетъ средней скорости $U = \frac{\int_\omega u d\omega}{\omega} = \frac{\int_\omega u d\omega}{\int_\omega d\omega}$

Назовемъ ε перемѣнную величину (положительную или отрицательную), изображающую разность между дѣйствительными скоростями и средней. По опредѣленію

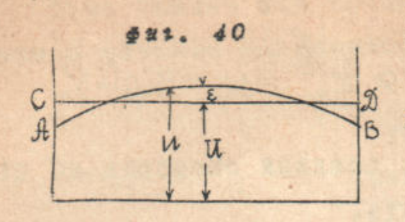
$$u = U \pm \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$U = \frac{\int_\omega u d\omega}{\int_\omega d\omega} = \frac{\int_\omega U d\omega}{\omega} \pm \frac{\int_\omega \varepsilon d\omega}{\omega} = U + \frac{1}{\omega}\int_\omega \varepsilon d\omega$$

слѣдовательно,

$$\int_\omega \varepsilon d\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Составимъ теперь еще выраженіе количества движенія, заключеннаго въ протекающей черезъ данное сѣченіе въ единицу



времени массѣ жидкости.

Количество движенія, соотвѣтствующее элементарному расходу

$$\frac{\gamma}{g} q u = \frac{\gamma}{g} u^2 d\omega$$

Полное количество движенія, очевидно,

$$K_д = \frac{\gamma}{g} \int_\omega u^2 d\omega$$

подобно тому, какъ полная живая сила Ж. С. (21)

$$Ж.С. = \frac{\gamma}{g} \int_\omega \frac{u^3 d\omega}{2}$$

Выразимъ теперь количество движенія и живую силу черезъ среднюю скорость.

Въ силу (α)

$$u^2 = (U + \varepsilon)^2 = U^2 + 2U\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$u^3 = (U + \varepsilon)^3 = U^3 + 3U^2\varepsilon + 3U\varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

$$K_д = \frac{\gamma}{g} \int_\omega u^2 d\omega = \frac{\gamma}{g} \left[U^2 \int_\omega d\omega + 2U \int_\omega \varepsilon d\omega + \int_\omega \varepsilon^2 d\omega \right]$$

или принимая во вниманіе (β)

$$\frac{\gamma}{g} \int_\omega u^2 d\omega = \frac{\gamma}{g} U^2 \omega \left(1 + \frac{\int \varepsilon^2 d\omega}{U^2 \omega}\right) = \frac{\gamma}{g} U^2 \omega (1 + \eta) \quad - (\gamma)$$

гдѣ

$$\eta = \frac{\int \varepsilon^2 d\omega}{U^2 \omega} \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Величина η, очевидно, всегда положительная.

Выраженіе (γ), подобно (21) служитъ для выраженія дѣйствительнаго количества движенія черезъ количество движенія, соотвѣтствующее средней скорости $\frac{\gamma}{g} Q U = \frac{\gamma}{g} \omega U^2$. Подобно (22) выведемъ опредѣленіе

$$\alpha_0 = 1 + \eta = \frac{\frac{\gamma}{g} \int_\omega u^2 d\omega}{\frac{\gamma}{g} U^2 \omega} = \frac{\frac{\gamma}{g} \int_\omega q u d\omega}{\frac{\gamma}{g} Q U}$$

Составимъ теперь выраженіе живой силы

$$Ж.С = \frac{\gamma}{2g}\left[U^3\int d\omega + 3U^2\int \varepsilon d\omega + 3U\int \varepsilon^2 d\omega + \int \varepsilon^3 d\omega\right]$$

или принимая во вниманіе (β) и (δ)

$$Ж.С = \frac{\gamma}{2g} U^3\omega\left[1 + 3\eta + \frac{\int \varepsilon^3 d\omega}{U^3\omega}\right] \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Величины $\frac{\varepsilon^3}{U^3}$ малы по сравненію съ единицей; въ сумму притомъ они входятъ съ разными знаками. Потому третьимъ изъ выраженій стоящихъ въ (ε) въ скобкахъ можно пренебречь.

Такимъ образомъ получимъ

$$Ж.С = \frac{\gamma}{2g} U^3\omega(1 + 3\eta)$$

Сопостовляя съ (21) и (22) имѣемъ

$$\alpha = 1 + 3\eta$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что какъ живая сила, такъ и количество движенія могутъ выразиться черезъ среднюю скорость; для этого надо лишь знать величину

$$\eta = \frac{\int \varepsilon^2 d\omega}{U^2\omega}$$

Величина эта, очевидно, измѣняется въ зависимости отъ наличнаго распредѣленія скоростей. Для установившагося равномѣрнаго движенія въ каналахъ и трубахъ η можно въ среднемъ полагать равнымъ $\eta = 0.033$ и соотвѣтственно

$$\alpha = \backsim 1.1 \quad *)$$

II. Перейдемъ теперь къ составленію выраженія суммы членовъ, выражающихъ потенціальную энергію потока:

$$\gamma\int_\omega q\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Для этого, очевидно, необходимо прежде всего знать распредѣленіе давленія по сѣченію; въ одномъ частномъ случаѣ это дѣлается безъ всякаго труда, именно въ случаѣ такъ называемаго "медленно измѣняющагося движенія"

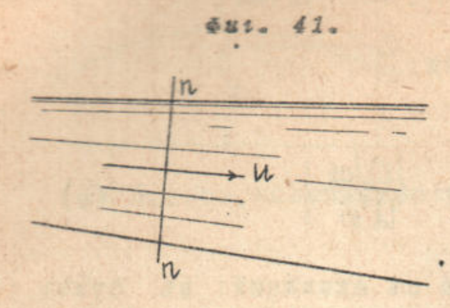
Предположимъ теченіе (фиг.41) удовлетворяющее слѣ-

---

*) *Болѣе подробно вопросъ, объ α, мы разсмотримъ въ II части курса.*

дующимъ условіямъ:

фиг. 41.



1) Линіи тока представляются почти прямыми, такъ что кривизна ихъ безконечно мала.

2) Живыя сѣченія измѣняются вдоль потока весьма медленно, такъ что уголъ такихъ струй (расхожденіе ихъ) весьма малъ, благодаря чему является возможность пренебрегать составляющими скоростей и ускореній въ плоскости живыхъ сѣченій, т. е. считать, что скорости и ускоренія перпендикулярны къ живымъ сѣченіямъ. Такое движеніе (весьма близкое къ параллельно струйному) будемъ называть "медленно измѣняющимся" (lentement variable; graduellement varié). Этотъ частный случай имѣетъ огромное значеніе; онъ является почти единственно разсматриваемымъ при современномъ развитіи науки въ цѣломъ рядѣ отдѣловъ гидравлики.

Для этого случая, между прочимъ, нетрудно показать, что распредѣленіе давленій въ живыхъ сѣченіяхъ слѣдуетъ гидростатическому закону, т.е. такое же точно, какъ имѣло бы мѣсто, если бы жидкость была неподвижной.

Это легко доказывается на основаніи самыхъ общихъ положеній динамики системы.

Дѣйствительно, въ любой системѣ матеріальныхъ точекъ мы можемъ разсматривать каждую изъ этихъ точекъ, какъ свободную и составить для нея уравненіе движенія, какъ для свободной матеріальной точки, прибавляя къ дѣйствующимъ на данную точку силамъ еще, такъ называемыя силы связи.

Вводя, кромѣ того, въ случаѣ движенія, согласно принципу D'Alambert'а, силы инерціи и тѣмъ самымъ сводя случай движенія къ случаю равновѣсія получаемъ систему уравненій для какой-либо точки, въ какомъ либо направленіи

Для случая равновѣсія

$$S_i + S'_i = 0$$

Для случая движенія

$$S_i + S'_i - m_i s''_i = 0$$

гдѣ S_i и S'_i проекція на направленіе S равнодѣйствующихъ внѣшнихъ силъ и силъ связей, дѣйствующихъ на точку i, а s''_i ея ускореніе въ направленіи S. Для всей системы, получимъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(S_i+S'_i)=0 \quad ; \quad \sum_{i=0}^{i=n}(S_i+S'_i-m_i s''_i)=0 \qquad (*)$$

Изъ уравненій (*) непосредственно слѣдуетъ, что если для какой либо точки въ какомъ либо направленіи ускоренія, а вмѣстѣ съ нимъ и силы инерціи отсутствуютъ, то силы связи въ этомъ направленіи въ случаѣ движенія одинаковы съ силами связей въ случаѣ равновѣсія. Въ жидкости силами связи является давленіе между частицами. Для медленно измѣняющагося движенія въ плоскости живого сѣченія, согласно опредѣленію ускоренія равны 0, слѣдовательно распредѣленіе силъ связей (въ данномъ случаѣ давленій) по сѣченію ничѣмъ не отличается отъ случая равновѣсія, т.е. слѣдуетъ гидростатическому закону.

Очевидно, (фиг.42) что во всѣхъ точкахъ живого сѣченія пьезометрическая высота $z+\frac{p}{\gamma}$ будетъ одинакова, и что слѣдовательно безразлично, въ какой точкѣ контура приставить пьезометръ для измѣренія ея величинъ. Выраженіе (23) въ этомъ случаѣ, очевидно, приметъ видъ:

$$\gamma\int q\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)=\gamma Q\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$$

гдѣ сумма членовъ, стоящая въ скобкахъ, постоянна.

III. Для рѣшенія вопроса необходимо еще сложить всѣ работы силъ сопротивленій для отдѣльныхъ струекъ.

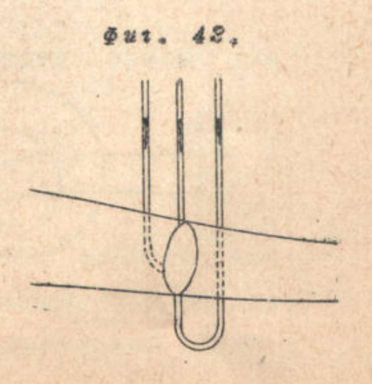
Такъ какъ пьезометрическая высота для всѣхъ точекъ сѣченія одинакова, то должна быть одинакова и потеря напора, т.е. каждую изъ элементарныхъ работъ можно представить въ видѣ

$$R_i=\gamma q_i h_w$$

полная работа силъ сопротивленія будетъ

$$R_w=\sum\gamma q_i h_w=\gamma Q h_w$$

Фиг. 42.



Теперь, послѣ всей этой подготовительной работы, мы, наконецъ, можемъ подойти къ рѣшенію поставленнаго вопроса, Складывая члены получаемъ уравненіе живыхъ силъ для всего потока въ видѣ:

$$\gamma Q\frac{\alpha_2 U_2^2}{2g}+\gamma Q\left(\frac{p_2}{\gamma}+z_2\right)=\gamma Q\frac{\alpha_1 U_1^2}{2g}+\gamma Q\left(\frac{p_1}{\gamma}+z\right)-\gamma Q h_w$$

или по сокращеніи на γQ

$$\frac{\alpha_2 U_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2=\frac{\alpha_1 U_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1-h_w \qquad (24)$$

Это и есть уравненіе Бернулли для цѣлаго потока, отличающееся отъ (20) лишь тѣмъ, что вмѣсто скорости u отдѣльной струйки въ него входятъ средняя скорость по сѣченію U, умноженная притомъ на коэффиціентъ α, зависящій отъ распредѣленія скоростей.

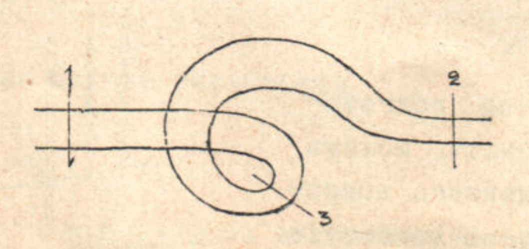
Напомнимъ еще разъ, что въ то время какъ уравненіе (22) примѣнимо къ струйкѣ всякаго вида и формы, уравненіе (24) мы можемъ примѣнять лишь къ такимъ двумъ сѣченіямъ 1 и 2, *движенія вблизи* которыхъ удовлетворяетъ условіямъ медленной измѣняемости. *На пути между этими сѣченіями* движеніе можетъ и не удовлетворять этимъ условіямъ.

Такъ на фиг. 43 уравненіе (24) можно примѣнить къ сѣченіямъ 1 и 2, но отнюдь нельзя, скажемъ, къ сѣченіямъ 1 и 3. Такимъ образомъ уравненіе (24) въ общемъ случаѣ можетъ быть примѣнено лишь къ опредѣленнымъ, отстоящимъ на конечномъ разстояніи, сѣченіямъ.

Ему, вообще говоря, нельзя придать (подобно 19^{bis}) дифференціальную форму

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}\right)+\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\gamma}\right)+\frac{dz}{ds}=-\frac{d}{ds}h_w \qquad (24^{bis})$$

Фиг.43.



Лишь въ томъ случаѣ, если движеніе на всемъ пути между 1 и 2 удовлетворяетъ условіямъ медленной измѣняемости уравненіе (24^{bis}) можетъ быть примѣнено на всемъ протяженіи. Въ этомъ случаѣ снова, какъ (C′)

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dH}{ds} = -\frac{dh_w}{ds} = -i_н$$

Отрицательная величина наклона напорной линіи $-\frac{dh_w}{ds} = -i_н$ есть въ этомъ случаѣ мѣра разсѣянія удѣльной энергіи для всего потока въ цѣломъ.

Принимая еще во вниманіе, что $-\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\gamma}+z\right) = i_p$ гдѣ i_p- пьезометрическій уклонъ.

Имѣемъ

$$i_p = \frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}\right) + \frac{d}{ds}(h_w) \quad . \quad . \quad (25)$$

Уравненіе (25) есть *основное уравненіе неравномѣрнаго медленно измѣняющагося движенія;* въ случаѣ открытаго русла линія пьезометрическихъ высотъ есть линія свободной поверхности, такимъ образомъ

$$i_p = i$$

т.е. пьезометрическій уклонъ есть уклонъ свободной поверхности водотока.

25. Основное уравненіе неустановившагося одноразмѣрнаго движенія жидкости.

Разсмотимъ теперь еще какъ видоизмѣняется уравненіе Бернулли для случая неустановившагося, перемѣннаго по времени, движенія. При этомъ ограничимся разсмотрѣніемъ движенія потока, заключеннаго въ неизмѣняющіяся (жесткія) стѣнки; въ этомъ случаѣ величина живыхъ сѣченій не измѣняется по времени; поэтому въ каждый данный моментъ черезъ всѣ сѣченія протекаетъ одинаковый расходъ Q.

A B S S

Начало непрерывности даетъ для каждаго сѣченія:

$$U = \frac{Q}{\omega} \quad и \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Кромѣ времени средняя скорость зависитъ лишь отъ площади живого сѣченія, т.е. *отъ одной координаты* S. Въ силу этого такое движеніе можно назвать *одноразмѣрнымъ*. Полная

производная отъ скорости по времени

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s}$$

Будемъ предполагать, что благодаря жесткой стѣнкѣ не измѣняестя по времени не только конфигурація всего потока въ цѣломъ, но также видъ и размѣры отдѣльныхъ струекъ.

Разсмотримъ перемѣщеніе за промежутокъ времени Δt элементарной струйки (фиг.30 стр. 42) изъ положенія AB въ положеніе $A'B'$ и примѣнимъ законъ живыхъ силъ на этомъ перемѣщеніи, предполагая движеніе неустановившимся.

Для составленія полнаго измѣненія живой силы отсѣка къ выраженію (21) надо будетъ теперь прибавить членъ, выражающій измѣненіе по времени (за промежутокъ Δt) живой силы, заключенной въ отсѣкѣ AB.

Живая сила, заключенная въ отсѣкѣ AB, равна, очевидно,

$$Ж.С. = \int_1^2 \frac{\gamma}{g}\omega ds \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{2g}\int_1^2 \frac{q^2}{\omega} ds = \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{q^2}{2}\int_1^2 \frac{ds}{\omega}$$

Измѣненіе живой силы за элементъ времени Δt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{q^2}{2}\int_1^2\frac{ds}{\omega}\right)\Delta t = \left(\frac{\gamma}{g} q \frac{\partial q}{\partial t}\int_1^2\frac{ds}{\omega}\right)\Delta t$$

Величина $\int_1^2 \frac{ds}{\omega}$, очевидно, не зависитъ отъ времени и для данной струйки является постоянной величиной, имѣющей измѣреніе обратное длинѣ. Составляя снова общее выраженіе закона живыхъ силъ, подобно (II); добавляя выраженіе (B) работы силъ сопротивленій, именно:

$$\gamma q\Delta t\left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}\right) + \frac{\gamma q}{g}\frac{\partial q}{\partial t}\int\frac{ds}{\omega}\Delta t = \gamma q\Delta t(z_1 - z_2) + q\Delta t(p_1 - p_2) - \gamma q\Delta t h_w$$

дѣля на $\gamma q\Delta t$, т.е. относя къ единицѣ вѣса и разнося члены, имѣемъ

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial q}{\partial t}\int_1^2\frac{ds}{\omega} - h_w \qquad (26)$$

Очевидно, что членъ $\frac{1}{g}\frac{\partial q}{\partial t}\int_1^2\frac{ds}{\omega}$ измѣряетъ отнесенное къ единицѣ вѣса протекающей жидкости измѣненіе по времени ки-

нетической энергіи въ отсѣкѣ $A-B$.

Въ дифференціальной формѣ уравненіе (26) можетъ быть переписано такъ:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{u^2}{2g} = -\frac{dh_w}{ds} - \frac{1}{g}\frac{\partial q}{\partial t}\frac{1}{\omega} = -\frac{dh_w}{ds} - \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (26^{bis})$$

Въ случаѣ, если движеніе медленно измѣняющееся, уравненіе, подобно (26^{bis}), можетъ быть написано и для цѣлаго потока. Для этого необходимо (см. § 24), умноживъ всѣ члены уравненія (26^{bis}) на $d\omega$, проинтегрировать полученное выраженіе въ предѣлахъ всего сѣченія и результатъ, затѣмъ, раздѣлить на ω.

Произведя подобную операцію надъ послѣднимъ членомъ, получаемъ:

$$\frac{1}{\omega}\left[\frac{1}{g}\int_\omega \frac{\partial u}{\partial t} d\omega\right] = \frac{1}{\omega g}\int_\omega \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\omega g}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}$$

Для другихъ членовъ переходъ отъ отдѣльной струйки ко всему сѣченію, уже разсмотрѣнъ въ параграфѣ 24.

Такимъ образомъ вмѣсто ур-нія $(24)^{bis}$ получаемъ для медленно измѣняющагося неустановившагося движенія:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\gamma}\right) + \frac{dz}{ds} = -\frac{d}{ds}h_w - \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}$$

вмѣсто (24)

$$\frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - h_w - \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} ds$$

при этомъ послѣдній членъ можетъ быть переписанъ въ видѣ:

$$\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} ds = \frac{1}{g}\frac{\partial Q}{\partial t}\int_1^2 \frac{ds}{\omega}$$

Вмѣсто ур-нія (25) получимъ

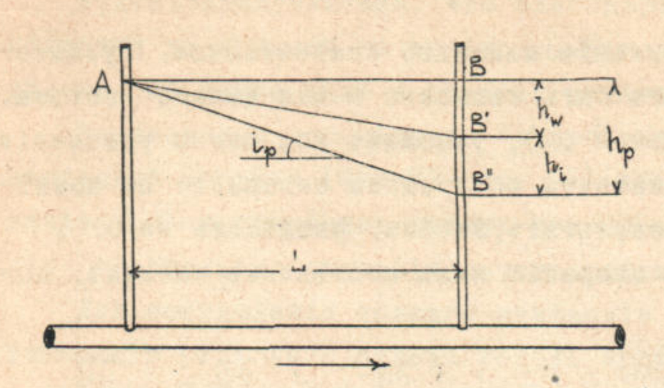
$$i_p = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}\right) + \frac{d}{ds}h_w + \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial U}{\partial t} \quad . \quad . \quad (26)$$

Уравненіе (26) представляетъ основное ур-ніе неустановившагося медленно измѣняющагося одноразмѣрнаго движенія жидкости.

П р и м ѣ р ъ : Для примѣра разсмотримъ движеніе въ прямой цилиндрической трубкѣ длины L. Въ этомъ случаѣ, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}\right) = 0 \; ; \; \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t}\int_1^2 \frac{ds}{\omega} = \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t}\cdot\frac{L}{\omega} = \frac{L}{g}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}$$

Фиг. 44.



Такимъ образомъ, принимая во вниманіе, что для цилиндрической трубы, кромѣ того $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt}$ полное паденіе напора h_p

$$h_p = h_w + \frac{L}{g}\cdot\frac{dU}{dt} = h_w + h_i$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что для медленно измѣняющагося движенія общія соотношенія, выражающія связь между скоростью и пьезометрической высотою въ данномъ сѣченіи, имѣютъ сравнительно простое выраженіе.

Въ случаяхъ, когда движеніе *не медленно измѣняющееся,* не удается обойтись столь простыми средствами. Правда уравненіе Бернулли и здѣсь справедливо для отдѣльной струйки, но пьезометрическая высота уже не одинакова по всему сѣченію и слѣдовательно, чтобы примѣнить уравненіе надо знать напередъ распредѣленіе давленій либо скоростей по всему сѣченію.

Такимъ образомъ, здѣсь приходиться вернуться къ основной и самой общей задачѣ механики жидкаго тѣла, а именно по вопросу о нахожденіи всѣхъ обстоятельствъ движенія (полной картины распредѣленія давленія и скоростей) потока жидкости отъ данной системы его силъ.

Рѣшеніе этой задачи составляетъ предметъ гидравлики. Изложеніе послѣдней, вообще говоря, не входитъ въ задачи настоящаго курса.

Мы ограничимся поэтому здѣсь лишь самымъ краткимъ изложеніемъ ея основъ, безъ которыхъ было бы затруднительно пониманіе нѣкоторыхъ вопросовъ въ послѣдующемъ.

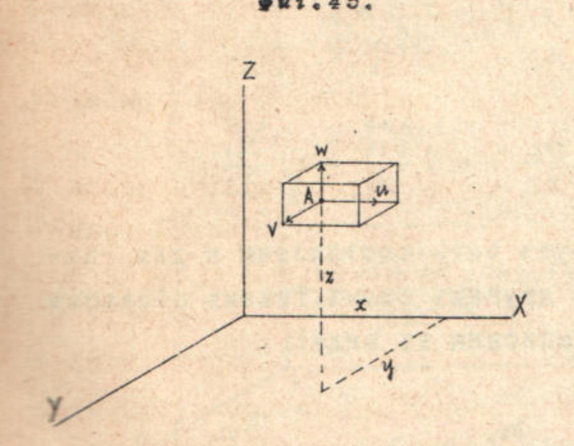
Глава III.

ОСНОВНЫЯ УРАВНЕНІЯ ГИДРОДИНАМИКИ.

26. *Гидродинамическія уравненія Эйлера.*

Общія уравненія движенія идеальной жидкости получаются изъ общихъ уравненій равновѣсія (3) добавленіемъ къ дѣйствующимъ силамъ силъ инерціи. На фиг. (45) скорость въ точкѣ A обозначимъ U и проекціи ея на координатныя оси обозначимъ соотвѣтственно u, v, w.

фиг. 45.



Тогда составляющія силъ инерціи по координатнымъ осямъ, дѣйствующихъ на массу заключенную въ элементарномъ параллепипедѣ, условія равновѣсія котораго мы разсмотрѣли въ пгр. 8, будутъ равны соотвѣтственно:

$$\left.\begin{aligned} &-\rho\, dxdydz\, \frac{du}{dt} \\ &-\rho\, dxdydz\, \frac{dv}{dt} \\ &-\rho\, dxdydz\, \frac{dw}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Прибавляя эти выраженія къ уравненіямъ (3) и сокращая на $dxdydz$, получаемъ вмѣсто системы уравненій (3) систему:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = q_x - \frac{du}{dt}\,;\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = q_y - \frac{dv}{dt}\,;\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = q_z - \frac{\partial w}{\partial t} \quad \ldots(27)$$

Величины $\frac{du}{dt}$; $\frac{dv}{dt}$; $\frac{dw}{dt}$ являются мѣрой полнаго измѣненія составляющихъ скоростей по времени.

Скорость, какъ было показано выше, является функціей, какъ времени, такъ и координатъ и потому измѣненіе скорости du вообще выражается черезъ

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Въ силу этого:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

а такъ какъ въ свою очередь:

$$\frac{dx}{dt} = u \;;\; \frac{dy}{dt} = v \;;\; \frac{dz}{dt} = w$$

то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Подобныя же выраженія могутъ быть составлены и для выраженія полныхъ ускореній и по другимъ осямъ. Такимъ образомъ уравненія (27) могутъ быть переписаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= q_x - \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= q_y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= q_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (27^{bis})$$

Эти уравненія даны Эйлеромъ въ 1755 году; (Hist. de l'Ac. de Berlin) они носятъ его имя и представляютъ самый общія уравненія движенія идеальной жидкости.

Къ системѣ ур-ній (27^{bis}) необходимо еще прибавить уравненіе, выражающее состояніе массы внутри разсматриваемаго объема движущейся жидкости.

Уравненіе это называется обыкновенно "уравненіемъ непре-

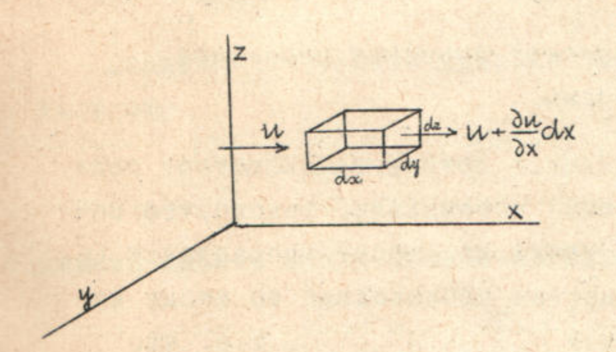
рывности", такъ какъ оно имѣетъ цѣлью характеризовать непрерывное распространенiе массы, отсутствiе пустотъ въ жидкомъ тѣлѣ.

Для капельно жидкаго тѣла, постоянной плотности условiе непрерывности формулируется въ высшей степени просто. Очевидно, внутри любого постояннаго замкнутаго объема масса жидкости должна оставаться неизмѣнной; количество втекающей въ извѣстный промежутокъ времени въ такой объемъ жидкости равно объему жидкости, вытекающей изъ него за тотъ же промежутокъ времени. Общiй потокъ черезъ всю поверхность выдѣленнаго объема долженъ быть равенъ нулю.

Выдѣляя, въ качествѣ разсматриваемаго объема, элементарный параллелепипедъ (фиг. 46) со сторонами dx, dy, dz; и составляя выраженiе потока черезъ стѣнки перпендикулярныя къ оси X получимъ соотвѣтственно:

$$-(dydz)u \quad \text{и} \quad +(dydz)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)$$

Фиг.46.



причемъ положительнымъ мы считаемъ потокъ направленный изъ объема, отрицательнымъ - внутрь его. Результирующiй потокъ черезъ разсматриваемыя площадки, очевидно, равенъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}dxdydz$$

Подобныя же выраженiя могутъ быть составлены попарно и для другихъ площадокъ, перпендикулярныхъ осямъ Y и Z.

$$\frac{\partial v}{\partial y}dxdydz \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial z}\cdot dxdydz$$

Полный потокъ черезъ всю поверхность долженъ быть равенъ нулю; складывая полученныя выше выраженiя для результирующихъ потока черезъ всѣ грани параллелепипеда и сокращая на $dxdydz$, получаемъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad .(28)$$

Это и есть уравненiе напрерывности для жидкости.

Уравненiе (27)bis и (28) заключаютъ четыре неизвѣстныхъ

u, v, w и p. Ихъ интегрированіе, при данной системѣ силъ q, должно дать значеніе этихъ величинъ, какъ функцій отъ времени и координатъ, т.е. дать рѣшеніе поставленной основной задачи. Произвольныя постоянныя, входящія въ интегралы должны быть при этомъ опредѣлены по условіямъ на границахъ, либо по начальнымъ условіямъ движенія.

Однако, математика до настоящаго времени еще не дала рѣшеній совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій въ общей формѣ.

Такимъ образомъ основная задача гидродинамики не можетъ быть рѣшена въ общей формѣ благодаря отсутствію соотвѣтственнаго математическаго аппарата.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, однако, уравненія приводятъ къ ряду крайне важныхъ и полезныхъ обобщеній. Къ такимъ, напримѣръ, относится случай, такъ называемаго, "безвихревого" движенія, или движенія съ потенціаломъ скоростей.

27. *Случай "безвихревого" движенія идеальной жидкости.*

1. Представимъ себѣ, что движеніе потока, находящагося подъ дѣйствіемъ системы силъ, имѣющей потенціалъ, таково, что составляющая скорости въ любой точкѣ по любому направленію n можетъ быть выражена, какъ частная производная по этому направленію отъ нѣкоторой функціи $\Phi(x,y,z,t)$, т.е. что

$$U \cos(U,n) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

Очевидно, въ этомъ случаѣ:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ ; \ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\ ; \ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad . \ . \ . \ (a)$$

Ограничимъ при этомъ наше разсмотрѣніе случаемъ установившагося движенія; въ этомъ случаѣ Φ является уже лишь функціей однихъ координатъ и

$$d\Phi = u dx + v dy + w dz \quad . \ . \ . \ (29)$$

Движеніе, удовлетворяющее указаннымъ выше условіямъ называется движеніемъ съ потенціаломъ скоростей и функція Φ

носитъ названіе *потенціала скоростей*.

Выраженіе (29) есть полный дифференціалъ функціи Φ. При этомъ, какъ извѣстно, имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad . \; . \quad (b)$$

Условія эти, впрочемъ, непосредственно слѣдуютъ также изъ опредѣленія (a). Мы впослѣдствіи укажемъ физическій смыслъ соотношеній (b); теперь же вернемся къ общимъ уравненіямъ (27^{bis}) и (28). Первое изъ нихъ, уравненіе (27^{bis}), принимая во вниманіе (a), переписываемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = q_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \quad (c)$$

Лѣвая часть выраженія есть ничто иное, какъ

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Называя U — силовую функцію силъ, дѣйствующихъ на потокъ, такъ что

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = q_x dx + q_y dy + q_z dz$$

можемъ правую часть уравненія выразить въ видѣ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U - \frac{p}{\rho}\right)$$

Такимъ образомъ уравненіе (c) принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) = 0 \quad . \; . \; . \quad (d)$$

Совершенно такимъ же способомъ второе и третье уравненіе (27^{bis}) приводятся къ виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) &= 0 \end{aligned} \quad . \; . \quad (d^{bis})$$

Откуда слѣдуетъ, что для разсматриваемаго случая движенія съ

потенціаломъ скоростей, вообще говоря

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = const.$$

или замѣняя ρ черезъ $\frac{\gamma}{g}$ и дѣля на g.

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - \frac{U}{g} = E = const. \qquad (30)$$

Уравненіе непрерывности (28) при этомъ получаетъ видъ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

Физическій смыслъ уравненія (30) слѣдующій ($\frac{p}{\gamma} - \frac{U}{g}$)*) есть мѣра потенціальной, $\frac{V^2}{2g}$ - мѣра кинетической энергіи, заключенной въ единицѣ вѣса жидкости; сумма этихъ членовъ, величина E - полная удѣльная энергія.

Уравненіе (30) такимъ образомъ гласитъ, что при движеніи идеальной жидкости подъ дѣйствіемъ системы силъ, имѣющихъ потенціалъ, "удѣльная" энергія во всемъ потокѣ одинакова, т.е. имѣетъ мѣсто равномѣрное распредѣленіе энергіи во всемъ объемѣ движущейся жидкости.

Если примѣнить уравненіе (30) къ движенію тяжелой жидкости, то направляя ось Z вертикально кверху, имѣемъ:

$$dU = -g dz \quad ; \quad U = -gz + C$$

подставляя въ уравненіе (30), получаемъ:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = E = const. \qquad (31)$$

т.е. уравненіе подобное уравненію Бернулли (19) для идеальной жидкости.

Разница, однако между этими уравненіями въ томъ, что уравненіе Бернулли примѣнимо лишь къ отдѣльной струйкѣ и свидѣтельствуетъ о постоянствѣ удѣльной энергіи лишь въ предѣлахъ той или иной струйки; за то оно примѣнимо къ устано-

---

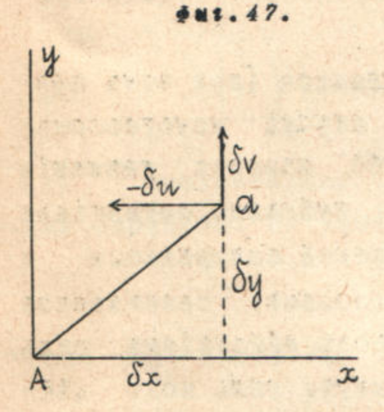
*) *Какъ извѣстно изъ механики $-U$, т.е. силовая функція съ обратнымъ знакомъ, носитъ названіе потенціальной функціи или потенціала системы силъ.*

вившемуся движенію идеальной жидкости во всѣхъ случаяхъ независимо отъ того, имѣется либо нѣтъ потенціалъ скоростей.

Наоборотъ, примѣненіе уравненія (31) ограничено условіемъ (a), т.е. наличностью потенціала скоростей; при этомъ сохраняется постоянство содержанія энергіи уже во всемъ объемѣ движущейся жидкости. Тѣмъ самымъ, если извѣстно распредѣленіе скоростей въ предѣлахъ потока, то опредѣляется само собой распредѣленіе давленій и наоборотъ.

2. Выяснимъ теперь физическій смыслъ ур-ній (b)

Фиг. 47.



Представимъ себѣ, что вблизи точки A жидкость вращается вокругъ оси Z съ угловой скоростью ζ. Въ этомъ случаѣ составляющія относительныхъ скоростей по отношенію къ A для какой либо точкѣ a (съ координатами δx и δy) будутъ соотвѣтственно $\delta u = -\zeta\delta y$

и $\delta v = \zeta \delta x$

откуда имѣемъ

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}\right)$$

Уменьшая δx и δy и переходя къ предѣлу, получаемъ, что

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\zeta\ ;\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2\eta\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 2\xi \quad (e)$$

т.е. что выраженія $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ и т.д. представляютъ собой удвоенныя угловыя скороси вращенія вокругъ координатныхъ осей частицъ сосѣднихъ точкѣ A.

Векторъ W - геометрическая сумма векторовъ ξ, η, ζ отложенныхъ по соотвѣтственнымъ осямъ, изображаетъ по величинѣ и направленію полную угловую скорость вращенія частицъ вокругъ точки A, Векторъ этотъ, тѣмъ самымъ характеризующій вращательное движеніе вблизи точки A, носитъ названіе *вихря* въ точкѣ A.

Сопоставляя условія (a) съ (b) приходимъ къ заключенію, что условія (b) равновильны условію

$$\xi = \eta = \zeta = 0 \quad \text{или} \quad W = 0 \quad . \ . \ (f)$$

Такимъ образомъ, условія существованія потенціала скоростей въ нѣкоторомъ потокѣ равносильно съ отсутствіемъ въ немъ вихрей. Движеніе это потому называютъ также "безвихревымъ. Обратно, если въ потокѣ имѣются вращенія, вихри, то такое движеніе уже не можетъ имѣть потенціала скоростей.

Слѣдовательно, равномѣрное распредѣленіе энергіи въ средѣ движущейся идеальной жидкости будетъ имѣть мѣсто лишь въ томъ случаѣ, если во всей средѣ жидкости не имѣется вращеній вихрей; при существованіи вихрей постоянство энергіи будетъ имѣть мѣсто уже лишь вдоль струй, т.е. дѣйствительныхъ траекторій частицъ.

Въ гидродинамикѣ, при этомъ, доказывается (при чемъ приводимое положеніе распространяется и на случай неустановившагося движенія), что если въ какой либо моментъ движеніе идеальной жидкости подъ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ потенціалъ обладаетъ потенціаломъ скоростей, то таковой сохраняется и впредь во все время движенія. Другими словами, безвихревое движеніе не можетъ перейти въ вихревое подъ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ потенціалъ; вихри могутъ возникнуть лишь подъ дѣйствіемъ силъ потенціала не имѣющихъ, къ каковымъ, напримѣръ, принадлежатъ силы тренія.

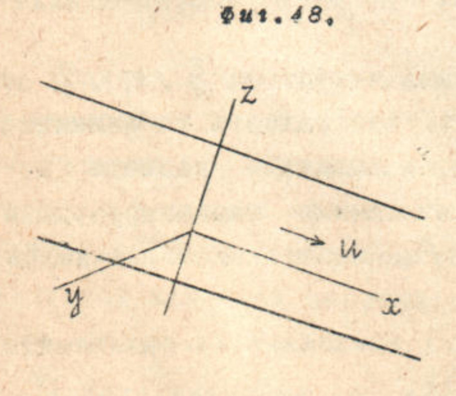
Обратно, разъ возникшій вихрь въ идеальной жидкости не можетъ уничтожиться и т.д.

Мы ограничимся вышеизложеннымъ, отсылая интересующихся для дальнѣйшаго ознакомленія съ предметомъ къ спеціальнымъ курсамъ гидродинамики.

П р и м ѣ р ы : 1) Приводимъ нѣсколько простѣйшихъ примѣровъ безвихреваго движенія жидкости.

а) Прямолинейное, равномѣрное движеніе въ цилиндрической трубѣ или каналѣ (фиг.48).

Фиг.48.



Ось x расположимъ вдоль оси трубы; очевидно, скорости паралельны оси x; величины v и w и ихъ производныя по координатамъ повсюду равны 0.

Изъ условій (f) по сопоставленіи съ (e) непосредственно слѣдуетъ, что въ виду этого и

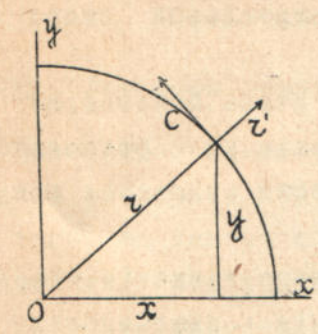
$\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ должны быть равны нулю.

Такимъ образомъ, въ безвихревомъ движенiи скорости по всему сѣченiю должны быть одинаковыми.

2) Разсмотримъ еще случай установившагося плоскаго безвихреваго движенiя жидкости, вращающейся вокругъ оси Z.

Для разсмотрѣнiя вопроса удобнѣе перейти къ полярнымъ координатамъ r и φ; соотвѣтственно координаты и скорости точки выразятся черезъ:

фиг.49.



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$u = \frac{dx}{dt} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi'$$

гдѣ r' составляющая скорости по радiусу; $r\varphi' = c$ вращательная скорость. Въ частности въ разсматриваемомъ нами случаѣ $r' = 0$ и

$$u = -c\sin\varphi\,;\ v = c\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Такъ какъ кромѣ того:

$$x^2 + y^2 = r^2\,;\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

то

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi\,;\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi \qquad (C)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y\cos^2\varphi}{x^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}\,;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2\varphi}{x} = +\frac{\cos\varphi}{r}$$

Условiя безвихреваго движенiя въ плоскости xy

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

прiобрѣтаетъ видъ:

$$\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Подставляя, соотвѣтственно (В) и (С) получаемъ:

$$\zeta = \cos^2\varphi\frac{\partial c}{\partial r} + \sin^2\varphi\frac{c}{r} + \sin^2\varphi\frac{\partial c}{\partial r} + \cos^2\varphi\frac{c}{r} = 0$$

или

$$\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{c}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial c}{\partial r} r + c\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(c \cdot r) = 0$$

откуда

$$cr = const$$

т.е. произведенiе изъ радiуса вектора и вращательной скорости есть величина постоянная.

Очевидно, скорость вблизи оси дѣлается очень большой; давленiе падаетъ; этимъ и объясняется стремленiе къ образованiю воронокъ, часто наблюдаемое на поверхности водоемовъ при вращательномъ движенiи жидкости.

3) При разсмотрѣнiи вопросовъ безвихреваго движенiя идеальной жидкости обычно исходятъ изъ уравненiя непрерывности

$$\Delta^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Вопросъ сводится къ нахожденiю нѣкоторой функцiи Φ, удовлетворяющей ур-нiю (32) и даннымъ условiямъ на границахъ.

Сравнительно много рѣшенiй получено для случая плоскаго движенiя, для котораго ур-нiе (32) прiобрѣтаетъ видъ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

дифференцiальное уравненiе, которому, какъ извѣстно, удовлетворяетъ любая аналитическая функцiя комплекснаго перемѣннаго. Рѣшенiе задачи позволяетъ построить линiи тока (траекторiи), найти величину скоростей, а, слѣдовательно, и давленiй, т.е. изобразить полностью картину движенiя.

Полученная такимъ образомъ картина движенiя для идеальной жидкости въ нѣкоторыхъ случаяхъ близка къ дѣйствительности, т.е. можетъ служить для изображенiя движенiя вязкой жидкости.

Подобного рода случай, напр., представляется всякiй разъ, когда дѣйствiе силъ вязкости не успѣло еще въ достаточной мѣрѣ проявиться и сколько-нибудь значительно видоизмѣнить картину потенцiальнаго движенiя; примѣромъ можетъ служить хотя бы явленiе истеченiя покоющейся жидкости черезъ небольшое отверстiе въ тонкой стѣнкѣ (см. II часть). Мы еще вернемся къ этому вопросу впослѣдствiи; теперь же перейдемъ къ разсмотрѣнiю сопротивленiй, имѣющихъ мѣсто при движенiи реальной жидкости.

Глава IV.

О СОПРОТИВЛЕНІЯХЪ.

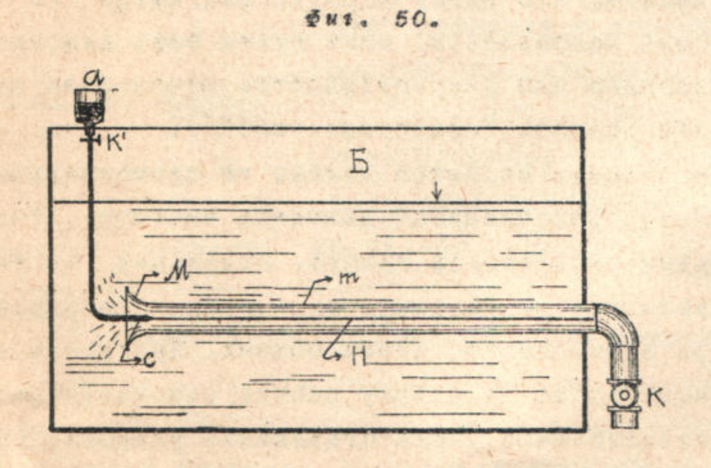
28. *Два рода движенія вязкой жидкости.*

Величины и свойства сопротивленій, проявляющихся въ движущейся вязкой жидкости существенно разнятся въ зависимости отъ того, въ какомъ состояніи находится движеніе въ "струйчатомъ" или "безпорядочномъ".

Хотя это различіе въ той или иной мѣрѣ сознавалось гидрабликами еще съ начала XIX стол., тѣмъ не менѣе окончательно выяснить всѣ обстоятельства дѣла удалось лишь въ началѣ восьмидесятыхъ годовъ англичанину Reynolds'у (Phil Trans.R S1883 см. также Collected papers т.II) при этомъ посредствомъ слѣдующаго необыкновеннаго простого и нагляднаго опыта*).

Бакъ со стеклянными стѣнками наполненъ водой. Въ бакѣ установлена стеклянная трубка, снабженная съ одной стороны бака мундштукомъ M съ другой краномъ K, посредствомъ котораго можно регулировать вытеканіе воды, а тѣмъ самымъ и скорость воды въ трубкѣ. Надъ бакомъ установленъ сосудикъ a съ растворомъ анилиновой краски; краномъ K' можно регулировать притокъ краски въ устье трубки черезъ сопло C.

Фиг. 50.



Если постепенно открывая кранъ K, заставить воду вытекать черезъ трубку m и одновременно пускать краску, то будетъ происходить слѣдующее:

---

*) Приборъ Reynolds'а воспроизведенъ въ СПБ. Политехн. Инст. въ лабораторіи тренія проф. В. А. Кирпичева.

Сначала, когда, благодаря малому открытію крана K, скорость въ трубѣ мала, вытекающая изъ сопла анилиновая краска образуетъ внутри движущейся жидкости устойчивую несмѣшивающуюся съ окружающею жидкостью рѣзко очерченную окрашенную нить - "струю" (H).

Такимъ образомъ, наглядно демонстрируется существованіе внутри трубки "струйчатаго" движенія жидкости. Если, открывая кранъ K, увеличивать скорость въ трубкѣ, то черезъ нѣкоторое время наступаетъ моментъ, когда струйчатое движеніе внезапно измѣняетъ свой характеръ. Струя анилина, до того времени тянувшаяся вдоль трубки въ видѣ устойчивой рѣзко очерченной нити, теперь непосредственно по выходѣ изъ сопла, теряетъ рѣзко очерченную свою форму, разбивается на рядъ отдѣльныхъ, направленныхъ въ разныя стороны, крутящихся и колеблющихся, ежесекундно мѣняющихъ свой видъ и направленіе водоворотовъ; благодаря этому на самомъ короткомъ промежуткѣ краска перемѣшивается съ водой, образуя равномѣрно окрашенную струю.

Ясно, что здѣсь "струйчатаго" движенія болѣе не существуетъ; наоборотъ, движеніе отдѣльныхъ окрашенныхъ частей, вблизи выхода краски изъ сопла, гдѣ еще можно слѣдить хоть нѣсколько за внутреннимъ движеніемъ жидкости, наблюдать которое послѣ перемѣшиванія струй съ краской дѣлается, уже невозможнымъ, показываетъ, что здѣсь частицы двигаются то въ одномъ, то въ другомъ направленіи, какъ будто безъ какого либо опредѣленнаго порядка или закономѣрности. Этого рода движеніе, поэтому можно назвать "безпорядочнымъ"*).

Описанныя выше явленія являются далеко не единственнымъ примѣромъ такого "неупорядоченнаго" движенія частицъ. Такъ, напримѣръ, въ кинетической теоріи газовъ, отдѣльныя частицы газа также представляются движущимися безъ всякаго порядка и закономѣрн. внутри занимаемаго газомъ объема. При этомъ давленіе, производимое газомъ на стѣнку сосуда разсматривается какъ результатъ безчисленнаго числа отдѣльныхъ ударовъ, производимыхъ этими движущимися безъ всякаго порядка, во всѣхъ направленіяхъ газовыми частицами.

---

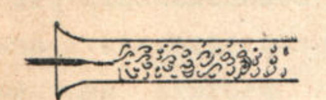
*) французы называютъ его tumultueux или turbulent (турбулентнымъ) англичане - eddy или sinuos motion; нѣмцы - Mischbewegung).

Однако, несмотря на произвольное направленіе движенія каждой изъ частицъ, *именно благодаря* безконечному разнообразію и множеству отдѣльныхъ производимыхъ частицами ударовъ, является вѣроятность, что среднее число ударовъ за нѣкоторый промежутокъ времени на ту или иную часть стѣнки получается постояннымъ. Благодаря этому и поддерживается постоянное давленіе газа на стѣнку, которое и является тѣмъ самымъ постояннымъ "среднимъ, „*статистическимъ*"*) результатомъ безчисленнаго множества, казалось бы, совершенно произвольныхъ, ничѣмъ не урегулированныхъ, не упорядоченныхъ проявленій.

Совершенно также, въ безпорядочномъ движеніи жидкости, хотя частицы ея летаютъ совершенно произвольно во всѣхъ направленіяхъ, сталкиваясь и отталкиваясь другъ отъ друга о наружную стѣнку, тѣмъ не менѣе какъ средній "статистическій" результатъ этихъ безчисленныхъ неупорядоченныхъ движеній мы получаемъ опять таки нѣкоторый "*установившійся*" потокъ частицъ черезъ ту или иную площадку внутри жидкости, выражающійся, хотя бы въ опытѣ Reynolds'а въ томъ, что при опредѣленномъ уровнѣ воды въ бакѣ и нѣкоторомъ открытіи крана K, черезъ трубу вытекаетъ въ отдѣльный промежутокъ времени всегда одно и то же количество жидкости.

Возвращаясь къ работамъ Reynolds'а прежде всего отмѣтимъ, что согласно опыту для трубы опредѣленнаго діаметра и при данной температурѣ воды нарушеніе "струйчатости" движенія и переходъ его въ "безпорядочное" происходитъ при одной и той же опредѣленной средней скорости въ трубѣ. Такимъ образомъ, наличность того или иного рода движенія обусловливается, при прочихъ равныхъ условіяхъ, величиною скорости. То значеніе послѣдней,

Фиг. 51.



---

*) *Разсмотрѣніе подобнаго рода вопросовъ, связанныхъ съ примѣненіемъ теоріи вѣроятностей къ изслѣдованію движеній системъ молекулъ, относится къ области, такъ называемой, "статистической" механики. Терминъ "статистическій" установился, очевидно, по аналогіи съ "статистикой", также стремящейся, опираясь на "законъ большихъ чиселъ", найти среднія устойчивые результаты въ многообразномъ проявленіи явленій соціальныхъ, біологическихъ, этнографическихъ, и пр.*

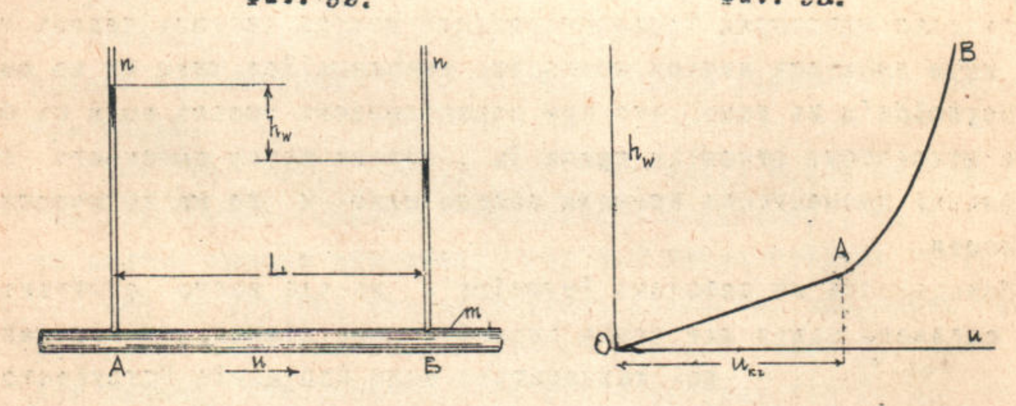
при которой происходитъ перемѣна формы движенія, Reynolds назвалъ *"критической скоростью"*. Съ увеличеніемъ діаметра трубъ критическая скорость понижается, Въ томъ же направленіи вліяетъ и повышеніе температуры. Если теперь въ точкахъ A и B прямой цилиндрической трубки m поставить пьезометры (n) и наблюдать потерю напора h_w (см. фиг.52) въ трубкѣ въ зависимости отъ скорости, то оказывается слѣдующее:

Пока скорость мала, потеря напора (измѣряющая удѣльную работу сопротивленій) возрастаетъ пропорціонально величинѣ скорости. Такимъ образомъ,

$$h_{w_1} = k u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

На фиг.53. изображающей графикъ измѣненія h_w отъ скорости уравненію (A), соотвѣтствуетъ прямая $O - A$. Когда скорость

фиг. 52. фиг. 53.



достигнетъ "критической", законъ измѣненія сопротивленія рѣзко мѣняется. На фиг. 53 скоростямъ $u > u_k$ соотвѣтствуетъ кривая $A - B$, указывающая, что потеря напора растетъ быстрѣе скорости. Опытъ показываетъ, что сопротивленіе въ этомъ случаѣ почти пропорціонально *квадрату* скорости.

Такимъ образомъ мы видимъ, что различнымъ формамъ движенія соотвѣтствуютъ совершенно различные законы сопротивленій; само собой, очевидно, что должны коренным образомъ разниться какъ "происхожденіе", такъ и "способы дѣйствія силъ сопротивленій или, то, что можно назвать "механизмомъ" сопротивленій.

Законъ измѣненія сопротивленій весьма наглядно обнаруживается посредствомъ изображенія связи $h_w = f(u)$ въ логарифмической шкалѣ, т.е. путемъ примѣненія такъ называемой "логарифмической анаморфозы".

Опытъ показываетъ, что связь между потерей напора и ско-

ростью можно изобразить посредствомъ соотношенія

$$h_w = Ku^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

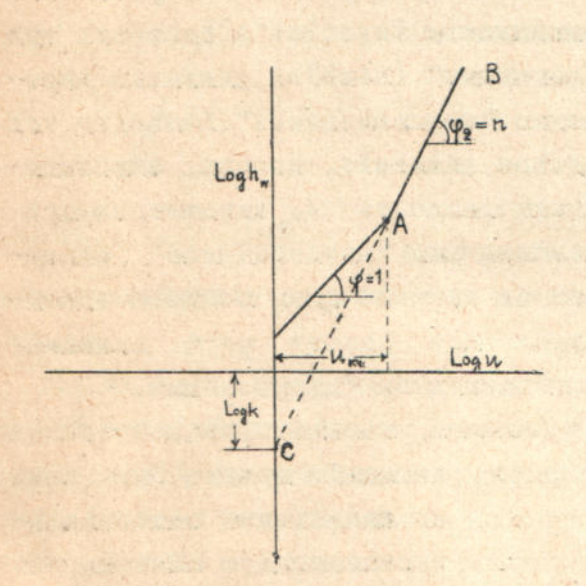
гдѣ K - нѣкоторый коэффиціентъ, а n показатель степени, указывающій, пропорціонально какой степени скорости возрастаетъ потеря напора; логарифмируя выраженіе (33) получаемъ:

$$\log h_w = \log k + n \log u$$

Если по абциссамъ откладывать $\log u$;а по ординатамъ $\log h_w$, то принимая во вниманіе, что $\log k$ есть постоянная, получаемъ уравненіе прямой линіи, угловой коэффиціентъ которой есть n ; такимъ образомъ, показатель n въ уравненіи опредѣляется просто какъ тангенсъ угла φ наклона прямой.

Соотвѣтственно съ этимъ получаемъ слѣдующую картину измѣненія сопротивленій въ логарифмической шкалѣ. Для величинъ $u < u_к$ имѣемъ прямую, наклонную подъ угломъ 45° ($tg\varphi = 1$; $n = 1$). Въ точкѣ $u = u_к$ прямая рѣзко измѣняетъ свой уклонъ; значеніе $tg\varphi$ приближается къ 2.

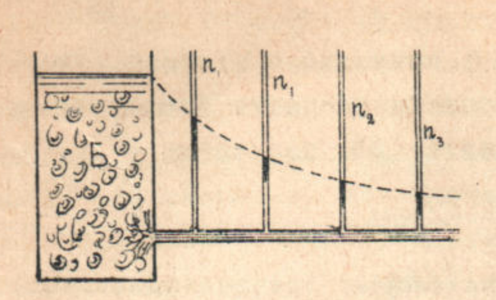
Фиг. 54.



Строя діаграмму (фиг.54) непосредственно по даннымъ опыта по уклону прямой AB узнаемъ величину показателя n , т.е. заключаемъ о томъ, какой степени скорости пропорціональна потеря напора. $\log k$ въ то же время измѣряется въ соотвѣтственномъ масштабѣ длиной отрѣзка OC на оси координатъ.

2. Какъ было указано выше, "критической" скоростью Reynolds назвалъ ту скорость, при которой жидкость находящаяся *первоначально* въ бакѣ *въ покоп, при вступленіи въ трубку проходитъ въ безпорядочное движеніе*. Можно, однако, подойти къ вопросу съ иной точки зрѣнія. Пусть (фиг.55) въ бакѣ Б жидкость искусственно поддерживается въ безпорядочномъ движеніи. Можно задать вопросъ, не можетъ ли быть создано та-

Фиг. 55.



кихъ условій, при которыхъ жидкость вступая изъ бака въ трубку въ состояніи безпорядочнаго движенія переходитъ затѣмъ уже въ самой трубкѣ въ движеніе струйчатое упорядоченное. Reynolds отвѣтилъ опытомъ также и на этотъ вопросъ. Установивъ въ трубѣ рядъ пьезометровъ и сопоставляя потери напора со скоростями воды въ трубкѣ, онъ пришелъ къ заключенію, что для даннаго діаметра трубы и температуры имѣется опять таки нѣкоторая скорость u_{k_2}, при которой имѣющее мѣсто въ началѣ трубы безпорядочное движеніе въ дальнѣйшемъ какъ бы "успокаивается", переходя въ струйчатое. Величину этой скорости u_{k_2} мы будемъ называть "нижней критической скоростью" въ противоположность u_{kk}, которую будемъ именовать просто критической скоростью.

Послѣдняя характеризуетъ точку *разрушенія струйчатаго* движенія, или, принимая терминологію Reynolds'а, скорость при которой, бывшее дотолѣ "устойчивымъ" (stable), движеніе перестаетъ быть таковымъ и дѣлается "неустойчивымъ". Очевидно, что выше этой скорости упорядоченное движеніе, вообще, невозможно. Обратно, нижняя критическая скорость u_{k_2} характеризуетъ скорость, ниже которой невозможно уже "неустойчивое" (безпорядочное) движеніе; даже если бы таковое было создано искусственнымъ путемъ, то предоставленное самому себѣ движеніе пріобрѣло бы устойчивость, сдѣлалось бы "струйчатымъ.

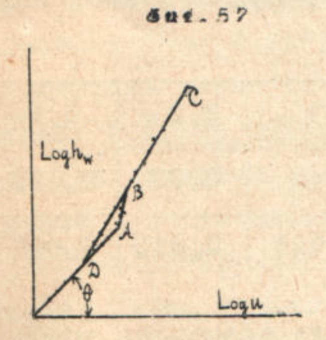
Между скоростями u_{k_2} и u_k лежитъ, очевидно, промежуточная область, въ которой, вообще говоря, движеніе можетъ быть какъ перваго, такъ и второго рода, смотря по начальнымъ обстоятельствамъ. Если вступая въ такого рода промежуточную область, жидкость находится въ устойчивомъ движеніи, то устойчивость не нарушается; зато не уничтожается и неустойчивость движенія и жидкость, вступившая въ промежуточную иблась въ состояніи безпорядочнаго движенія, продолжаетъ въ таковомъ пребывать. Слѣдовательно, "струйчатое движеніе" въ этой области, вообще говоря, неустойчиво; неустойчива также и величина сопротивленій; дѣйствительно, здѣсь возможны промежуточныя состоянія съ всевозможными степенями "безпорядочности" отъ чисто струйча-

таго движенія до движенія полностью безпорядочнаго и связанныя съ послѣднимъ потери.

Интересный случай подобнаго рода неустойчивыхъ состояній движенія служитъ слѣдующее явленіе, описанное впервые Couette'омъ. Жидкость вытекаетъ изъ бака Б черезъ трубку m ; при этомъ оказывается слѣдующее: сперва, если напоръ H достаточно великъ, жидкость вытекаетъ вполнѣ устойчивой струей l . Затѣмъ, когда напоръ понизится, скажемъ, до нѣкотораго $H_{к_1}$, истеченіе вдругъ дѣлается неустойчивымъ. Струя начинаетъ "бить", т.е. непрерывно колебаться. Далѣе, когда напоръ еще болѣе понизится, дойдя, скажемъ, до $H_{к_2}$, струя снова пріобрѣтаетъ устойчивый характеръ. Очевидно, что скорость въ трубѣ при напорахъ $H > H_{к_1}$ и $H < H_{к_2}$ соотвѣтственно больше $u_к$ и меньше $u_{к_2}$, т.е. движеніе въ первомъ случаѣ *безусловно безпорядочное* съ устойчивой средней статистической скоростью, во второмъ случаѣ *безусловно струйчатое*. Между $H_{к_1}$ и $H_{к_2}$ скорость находится въ промежуточной области неустойчивыхъ состояній, что и объясняетъ непрестанное измѣненіе ея величины и связанное съ этимъ біеніе струи.

Фиг.56.

Фиг.57.



Все вышесказанное хорошо иллюстрируется слѣдующей діаграммой, изображающей логарифмическую анаморфозу измѣненія сопротивленій въ свинцовой трубѣ и заимствованной мною изъ "Курса Гидравлики" Gibson'а. На фиг. 57 точки A и B соотвѣтствуютъ нижней и верхней критической скорости.

3. Изъ соображеній размѣрности*) (пользуясь закономъ подобія) Reynolds пришелъ къ заключенію, что величина критической скорости прямо пропорціональна вязкости и обратно пропорціональна плотности и діаметру трубы.

Такимъ образомъ,

$$u_к = \frac{к \cdot \eta}{\gamma \cdot d}$$

---

*) См. В. Л. Кирпичевъ. "Бесѣда о механикѣ". Стр. 185.

гдѣ η есть, такъ называемый, коэффиціентъ вязкости жидкости (см. ниже), а K нѣкоторый постоянный коэффиціентъ, одинаковый для всѣхъ жидкостей. На основаніи своихъ опытовъ Reynolds далъ слѣдующія значенія постоянныхъ (приводимъ ихъ въ системѣ C.G.S. по Biel'ю.*)

$$u_{кр_1} = \frac{1.29}{d}\cdot\frac{[\eta]}{\gamma}$$

$$u_{кр_2} = \frac{0.204}{d}\cdot\frac{[\eta]}{\gamma}$$

Для воды при температурѣ въ 12°C, выраженіе (для метроваго размѣра) пріобрѣтаютъ:

$$u_{к_1} = \frac{0.016}{d}$$

$$u_{к_2} = \frac{0.0025}{d}$$

Для трубъ различныхъ діаметровъ имѣемъ:

d	1 m/m	5 m/m	10 m/m	25 m/m	50 m/m	0,1 m	0,2 m	0,5 m	1 m
$u_{к_1}$ m/s	16	3,2	1,6	0,64	0,32	0,16	0,08	0,032	0,016
$u_{к_2}$ m/s	2,5	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,012	0,005	0,0025

Такимъ образомъ, мы видимъ, что для размѣровъ трубъ употребляемыхъ на практикѣ, скорости для воды очень малы и много ниже обычно примѣняемыхъ на практикѣ скоростей. И въ другихъ случаяхъ практики при движеніи воды мы имѣемъ дѣло почти исключительно съ безпорядочнымъ движеніемъ. Относящіяся къ нему сопротивленія поэтому почти исключительно и изучаются въ практической гидравликѣ.

Однако для другихъ жидкостей можно и на практикѣ встрѣтиться со скоростями ниже критическихъ. Такого рода случай можетъ представиться либо для жидкостей съ большимъ коэффиціентомъ внутренняго тренія (масла, нефть и пр.) либо для жид-

---

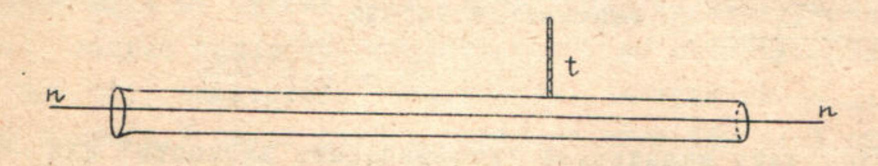
*) B. Biel: "Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfboren und gasförmigen Flussigkeiten.

костей съ малой плотностью (газы). Дѣйствительно, въ выраженіе $u_{кр.}$ входитъ величина не абсолютной вязкости, а вязкости, дѣленной на плотность $\frac{[\eta]}{\gamma}$; эта величина, напримѣръ, при 10°С для рѣпнаго масла въ 310, для атмосфернаго воздуха въ 11 разъ больше чѣмъ для воды; очевидно, соотвѣтственно больше и скорости въ таблицѣ (стр.80).

Опытъ Couette'a (An. de Ph. et ch. 1890) надъ треніемъ жидкости на поверхности вращающихся цилиндровъ подтвердилъ въ общемъ выводы Reynolds'a; онъ подтвердилъ, въ частности, и предположеніе его о постоянствѣ коэффиціента K.

Biel, анализируя рядъ опытовъ другихъ изслѣдователей, приходитъ къ весьма правдоподобному заключенію, что величина критической скорости нѣсколько измѣняется въ зависимости отъ шероховатости стѣнки. Крайне интересны также опыты проф. Barnes'a и Coker'a въ лабораторіи университета M'Gill въ Монреалѣ. Оказывается, что если протянуть черезъ трубку (фиг.58) проволоку $n-n$ и нагрѣвать ее электрическимъ токомъ, то при струйчатомъ движеніи воды черезъ трубку со скоростью ниже критической, нагрѣваются лишь ближайшіе къ проволокѣ слои; жидкость движется концентрическими слоями разной температуры, и самый чувствительный термометръ t, вставленный въ стѣнкѣ трубки, не обнаруживаетъ замѣтнаго повышенія температуры. Наоборотъ, какъ только скорость перейдетъ критическую и струйчатость нарушится, благодаря перемѣшиванію происходитъ нагрѣваніе всей массы протекающей жидкости, что немедленно обнаруживается термоментромъ t.

Фиг.58.



Такимъ образомъ, моментъ нарушенія струйчатости опредѣляется термометрически. Повидимому методъ этотъ много точнѣе метода окрашенныхъ струй.

Судя по указанію Bovey (Hydraulics стр.131 изд.1909),

можно думать, что изслѣдованія канадскихъ ученыхъ, еще не законченныя, прольютъ вообще много свѣта на весь вопросъ объ "устойчивости" движенія жидкости.

29. Сопротивленія въ струйчатомъ движеніи.

Въ струйчатомъ движеніи, судя по имѣющимся до настоящаго времени даннымъ опыта, сопротивленія проявляются въ общемъ въ согласіи съ законами тренія жидкихъ тѣлъ, высказанными еще Ньютономъ (Principia, T. II).

Согласно предположенію послѣдняго, сопротивленіе, проявляющееся при скольженіи одного слоя жидкости по другому, пропорціонально поверхности соприкасающихся площадей и скорости относительно скольженія.

Сопротивленіе не зависитъ отъ давленія и уменьшается съ возрастаніемъ температуры.

Какъ видимъ законы тренія жидкихъ тѣлъ совершенно противоположны законамъ тренія тѣлъ твердыхъ; треніе послѣднихъ прямо пропорціонально давленію и не зависитъ отъ площади, скорости и температуры.

Переходя къ численному выраженію законовъ движенія, замѣтимъ, что внутри движущейся жидкости относительная скорость скольженія по нѣкоторой площадкѣ, нормальной къ нѣкоторому направленію n измѣряется, очевидно, величиной

Фиг. 59.

$$\frac{du}{dn}$$

Т. о. сила тренія на поверхности выражается черезъ

$$T = [\eta] F \frac{du}{dn},$$

гдѣ $[\eta]$ такъ называемый "коэффиціентъ вязкости" или "коэффиціентъ внутренняго тренія" жидкости. Коэффиціентъ этотъ зависитъ отъ температуры и въ системѣ CGS выражаетъ силу тренія въ динахъ, приходящуюся на одинъ кв. сантиметръ поверхности, если движеніе таково, что два слоя жидкости, отстоящіе другъ отъ друга на одинъ сантиметръ, имѣютъ относительную скорость въ $\frac{1 \text{ ctm.}}{\text{sec}}$.

Если силу выражать въ граммахъ, то, очевидно,

$$\eta = \frac{[\eta]}{981}$$

Величина внутренняго тренія, вообще говоря, падаетъ съ температурой. Такъ для воды*) имѣемъ:

$$[\eta] = \frac{0{,}01775}{1 + 0{,}0331t + 0{,}000244t^2}$$

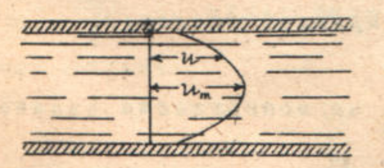
Въ нижеслѣдующей таблицѣ (заимствованной у Biel'я) приводимъ данныя абсолютной величины коэффиціента вязкости, а также такъ называемаго "модуля вязкости" $\frac{[\eta]}{\gamma}$, т.е. коэффиціента вязкости дѣленнаго на вѣсъ единицы объема.

Т а б л и ц а

Температура	0°		10°		20°		30°	
	$[\eta]$	$[\eta]/\gamma$	$[\eta]$	$[\eta]/\gamma$	$[\eta]$	$[\eta]/\gamma$	$[\eta]$	$[\eta]/\gamma$
Вода	0,0177	0,0177	0,0131	0,0131	0,0101	0,0101	0,00805	0,00805
Рѣпное масло	25,3	27,7	3,7	4,07	1,8	1,98	0,99	1,1
Атмосф. возд.	$0{,}171 \cdot 10^{-3}$	0,137	$0{,}176 \cdot 10^{-3}$	0,146	$0{,}188 \cdot 10^{-3}$	0,161	$0{,}186 \cdot 10^{-3}$	0,165
Ртуть					0,016	0,00118		

При струйчатомъ движеніи вязкой жидкости непосредственно прилегающій къ стѣнкѣ слой, повидимому, прилипаетъ къ послѣдней; такимъ образомъ, скорость (u) по сѣченію (скажемъ трубы фиг.60) непрерывно измѣняется отъ нуля до $u_{max.}$ въ центрѣ сѣченія. У самой стѣнки первый движущійся слой скользитъ по неподвижному слою жидкости; величина тренія у самой стѣнки

Фиг. 60.



$$T = F[\eta]\left(\frac{du}{dn}\right)_0 \quad \ldots.(34)$$

гдѣ значекъ $_0$ у $\frac{du}{dn}$ обозначаетъ, что градіентъ скорости взятъ непосредственно у

*) O. Meyer Wied. An. 1877. Стр. 387.

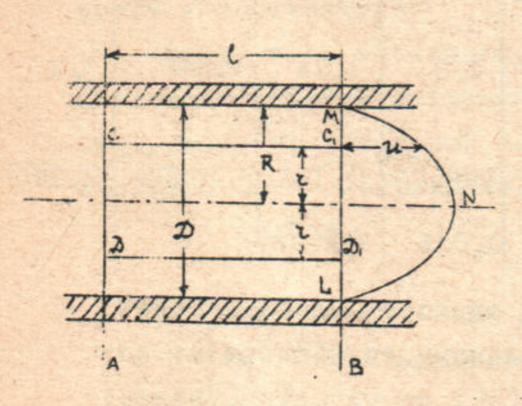
стѣнки.

При этомъ сопротивленіе не зависитъ отъ матеріала, изъ котораго сдѣлана труба, такъ какъ непосредственно сама стѣнка въ механизмѣ сопротивленія не участвуетъ. Все это подтверждается опытами надъ движеніемъ въ капиллярныхъ трубкахъ и вообще въ трубкахъ малаго діаметра, въ которыхъ легко осуществляется струйчатое движеніе благодаря значительной величинѣ критической скорости. Результаты подобныхъ опытовъ Poiseuille'я и др. хорошо совпадаютъ съ выводомъ теоріи, построенной на указанныхъ выше предположеніяхъ о равенствѣ нулю скорости на стѣнкахъ и выраженіи тренія по формулѣ (34)*).

Представленія эти подтверждаютъ опыты Coulomb'а надъ колесаніемъ дисковъ, а также опыты Couette'а надъ вращеніемъ цилиндровъ въ вязкой жидкости.

---

*) *Соотношеніе между потерей напора и расходомъ вязкой жидкости при струйчатомъ движеніи въ цилиндрической трубѣ получается весьма просто. Разсмотримъ отрѣзокъ A — B горизонтальной цилиндрической трубы длиною l, въ которомъ жидкость находится въ установившемся струйчатомъ движеніи.*



Пусть MNL изображаетъ кривую распредѣленія скоростей въ любомъ сѣченіи (скорости u измѣряются ординатой кривой отъ линіи ML).

Очевидно, скорости симметричны относительно оси трубы и одинаковы на цилиндрической поверхности радіуса r. Выдѣлимъ внутри жидкости цилиндръ CC'DD' и составимъ уравненіе равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на него.

Давленія въ сѣченіяхъ A и B соотвѣтственно обозначимъ p_A и p_B; разность ихъ $p_A - p_B = [\Delta p]$; $\frac{\Delta p}{\gamma}$ есть, слѣдовательно, потеря напора на участкѣ A — B: результирующая давленій:

$$\pi r^2[\Delta p],$$

очевидно, уравновѣшивается треніемъ на поверхности цилиндра.

Такимъ образомъ:

$$\pi r^2[\Delta p] + 2\pi r \cdot l[\eta]\frac{du}{dr} = 0$$

30. Сопротивленія въ безпорядочномъ движеніи.

Свойства сопротивленій въ безпорядочномъ, турбулентномъ движеніи существенно разнятся отъ таковыхъ въ движеніи упорядоченномъ, струйчатомъ.

Прежде всего, какъ показываютъ опыты, сопротивленія пропорціональны приблизительно квадрату скорости; затѣмъ сопротивленія не зависятъ (по крайней мѣрѣ сколько-нибудь существенно) отъ температуры; наоборотъ, зависятъ отъ матеріала и

или

$$du = -\frac{[\Delta p]r}{2l[\eta]}dr$$

Въ этой формулѣ $[\Delta p]$ также должно быть выражено (подобно $[\eta]$) въ динахъ на кв. сант. Выражая Δp въ граммахъ, т. е. полагая $\Delta p = \frac{[\Delta p]}{981}$ и интегрируя, имѣемъ:

$$u = -\frac{\Delta p r^2}{4l\eta} + const.$$

Полагая для $r = R$ $u = 0$ имѣемъ:

$$u = \frac{\Delta p}{4l\eta}(R^2 - r^2)$$

для центральной струйки $(r = 0)$

$$u_{max} = \frac{\Delta p R^2}{4l\eta}.$$

Такимъ образомъ, скорости распредѣляются по параболѣ.

Расходъ жидкости черезъ трубу:

$$Q = \int_0^R 2\pi r dr u = \frac{2\pi\Delta p}{4l\eta}\int(R^2 r - r^3)dr = \frac{\pi\Delta p}{2l\eta}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\eta l};$$

Средняя скорость

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p \cdot R^2}{8 \cdot \eta l}$$

Разницу давленій можно выразить черезъ пьезометрическую высоту $h_w = \frac{\Delta p}{\gamma}$, измѣряющую непосредственно паденіе напора.

Тѣмъ самымъ:

$$U = \frac{h_w}{l} \cdot \frac{R^2}{8} \cdot \frac{\gamma}{\eta} = \frac{981}{8} \cdot \frac{R^2 h_w}{l} \cdot \frac{\gamma}{[\eta]}$$

или

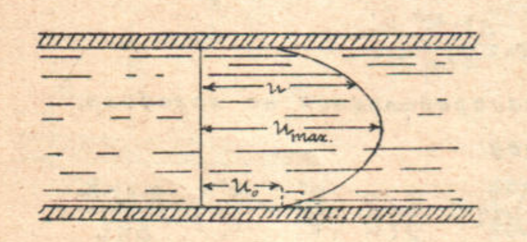
состоянія стѣнки; сопротивленія быстро возрастают съ увеличеніемъ неровности или, какъ обычно выражаются, "шероховатости" стѣнки.

Частицы жидкости ударяясь о выступы стѣнки отлетают отъ нея въ различныхъ направленіяхъ, причемъ съ возрастаніемъ шероховатости стѣнки увеличивается число и разнообразіе возможныхъ ударовъ частицъ жидкости о выступы и неровности стѣнки.

Состояніе поверхности послѣдней, степень ея шероховатости является такимъ образомъ, повидимому, основной причиной, обусловливающей степень безпорядочности или такъ называемую интенсивность турбулентности движенія, хотя самый фактъ нарушенія струйчатости и устойчивости движенія и возникновенія безпорядочности вызывается причинами, не имѣющими непосредственнаго отношенія къ стѣнкѣ, и обусловливается самимъ существомъ природою вязкихъ жидкостей.

Независимо отъ того, существуетъ или нѣтъ на стѣнкѣ неподвижный смачивающій ее и удерживаемый на ней силами сцѣпленія слой жидкости, все заставляетъ предполагать, что непосредственно у самой стѣнки, въ слоѣ, непосредственно прилегающемъ къ указанному выше неподвижному слою, скорости имѣютъ конечное значеніе.

Фиг. 61.



Безъ такого представленія было бы трудно, съ одной стороны объяснить вліяніе на сопротивленія шероховатости стѣнки, съ другой стороны - такое представленіе вполнѣ согласуется съ общимъ представленіемъ о безпорядочномъ движеніи и находитъ подтвержденіе въ опредѣленіи непосредственно опытомъ значительныхъ скоростей у стѣнки, т.е. на такомъ вообще разстояніи отъ нея, на которомъ еще возможно установить

$$\frac{h_w}{l} = i_p = \frac{8}{981} \cdot \frac{[\eta]}{\gamma} \cdot \frac{U}{R^2} ,$$

гдѣ i_p *- уклонъ пьезометрической линіи.*

Соотношеніе это для капиллярныхъ трубокъ вполнѣ подтверждается опытами Poiseuille'*я.*

измѣрительный приборъ.

Согласно общему представленію о безпорядочномъ движеніи мгновенная скорость въ данной точкѣ все время мѣняетъ свою величину и направленіе. Однако, средній "статистическій" результатъ движеній выражается въ томъ, что не только потокъ черезъ все сѣченіе, скажемъ, какой либо трубы, но и элементарный потокъ въ точкѣ A черезъ любую площадку сѣченіемъ $d\omega$, взятый для нѣкотораго конечнаго промежутка времени, остается неизмѣннымъ. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что въ каждой точкѣ остается постоянной и нѣкоторая "средняя" скорость, получаемая дѣленіемъ средняго постояннаго потока въ единицу времени q на сѣченіе площадки:

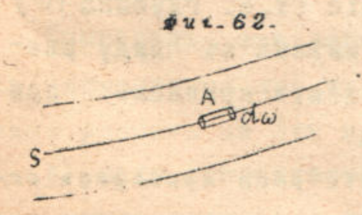
$$u_n = \frac{q}{d\omega}$$

Тѣмъ самымъ устанавливается понятіе о "средней статистической" скорости въ данной точкѣ, являющейся уже не дѣйствительною скоростью частицъ въ данной точкѣ, а лишь нѣкоторой фиктивной величиной, измѣряющей величину и направленіе средняго потока частицъ въ данной точкѣ.

Обертка такого рода скоростей есть "средняя" статистическая струйка (S—S), касательная къ направленію потока. Средній потокъ черезъ стѣнки ея - нуль.

Оперируя съ вопросами безпорядочнаго движенія, мы всегда будемъ имѣть дѣло именно съ этой "средней статистической" скоростью въ данной точкѣ (vitesse moyenne locale). Въ этомъ лишь смыслѣ мы будемъ говорить объ устойчивомъ и *закономѣрномъ* распредѣленіи скоростей по сѣченію водотока, о величинѣ наибольшей скорости $u_{max.}$ и скорости на стѣнкѣ u_o, а также о средней скорости сѣченія $U = \frac{Q}{\omega}$. Мы упомянули уже выше о работахъ Boussinesq'a, который показалъ, что съ "средними статистическими" величинами можно оперировать такъ же, какъ если бы онѣ были дѣйствительными, т.е., скажемъ разсматривать картину распредѣленія скоростей (61) какъ будто бы она изображаетъ дѣйствительныя, существующія реально скорости.

Фиг. 62.



Замѣтимъ, что всѣ измѣрительные приборы, которыми пользу-

ются для опредѣленія скоростей, опредѣляютъ именно эту среднюю скорость*). Устойчивость и постоянство результатовъ, получаемыхъ при такого рода опредѣленіяхъ несомнѣнно способствовали "прочности" представленія о "струйчатомъ движеніи жидкости" вообще, хотя указанія на безпорядочный характеръ движенія, какъ было выше указано, встрѣчаются въ гидравлической литературѣ уже въ началѣ прошлаго столѣтія. Однако, даже ходовыми сравнительно грубыми измѣрительными приборами отмѣчаются колебанія и отклоненія основныхъ гидравлическихъ элементовъ потока отъ "среднихъ" значеній. Поэтому при опредѣленіи, скажемъ, скорости въ открытомъ водотокѣ (рѣкѣ, каналѣ и пр.) тождественные результаты получаются лишь въ случаѣ, если опредѣленіе покрывало достаточный промежутокъ времени, чтобы учесть именно "среднюю" величину и исключить тѣ или иныя отклоненія скорости, называемыя въ этомъ случаѣ "пульсаціей". Мы вернемся къ вопросу о пульсаціи и объ ея отношеніи къ безпорядочному движенію воды въ главѣ, посвященной движенію въ открытыхъ руслахъ.

31. *Общее выраженіе для учета силъ сопротивленій въ прямолинейномъ равномѣрномъ установившемся движеніи жидкости.*

Составимъ теперь общее выраженіе для учета силъ сопротивленія въ прямолинейномъ равномѣрномъ установившемся движеніи жидкости, примѣнимое притомъ одинаково какъ къ движенію въ замкнутой цилиндрической трубѣ (фиг.63 a) любого поперечнаго сѣченія, такъ и къ движенію въ открытомъ руслѣ (фиг.63 b). Въ послѣднемъ случаѣ будемъ лишь предполагать, что, въ силу того, что мы разсматриваемъ случай равномѣрнаго движенія, не измѣняется форма сѣченія русла и его наполненіе (т.е. глубина h) Указывая на прямолинейность движенія, мы имѣемъ въ виду разсматривать потокъ, въ которомъ струи не имѣютъ кривизны; при

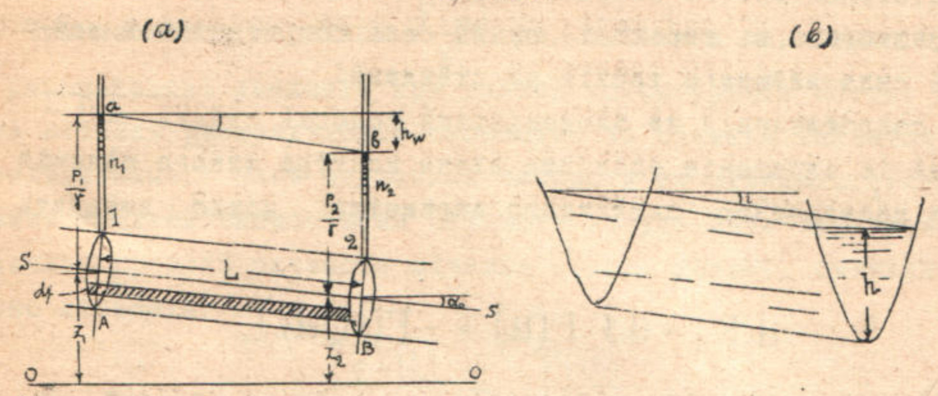
---

*) *Дѣйствительно, дѣйствіе всѣхъ такого рода приборовъ основано на воздѣйствіи на его части (лопасти и пр.) потока массы.*

этомъ, какъ было выше указано, распредѣленіе давленій слѣдуетъ гидростатическому закону.

Пусть A и B представляютъ два живыхъ сѣченія трубы

Фиг. 63.



(площадью ω) на разстояніи другъ отъ друга L. z_1 и z_2 соотвѣтственныя высоты центровъ тяжести сѣченій надъ горизонтальной плоскостью o-o; p_1 и p_2 давленія въ центрахъ тяжести, измѣряемыя соотвѣтствующими столбами жидкости въ пьезометрахъ n_1 и n_2; α_0 уголъ наклона оси трубы къ горизонту; очевидно, при этомъ

$$\sin\alpha_0 = \frac{z_1 - z_2}{L}$$

Примѣнимъ къ разсматриваемому отсѣку жидкости A-B законъ движенія центра инерціи.

Такъ какъ движеніе равномѣрное и установившееся, то ускореній не имѣется. Очевидно, дѣйствующія на отсѣкъ A-B силы уравновѣшиваются силами сопротивленія.

Проекціи дѣйствующихъ силъ на ось трубы s-s:

силы тяжести: $\gamma \cdot \omega \cdot L \cdot \sin\alpha_0 = \gamma \cdot \omega \cdot (z_1 - z_2)$

давленій: $(p_1 - p_2)\omega$

Составимъ еще выраженіе для силъ сопротивленія. Послѣднія, независимо отъ ихъ природы и количественнаго выраженія, можно разбить на двѣ группы:

а) силы сопротивленія внутреннія, дѣйствующія внутри отсѣка между частицами жидкости;

б) силы сопротивленія внѣшнія, т.е. силы, проявляющіяся между наружными частицами и стѣнками сосуда, силы, которыя мы

будемъ называть "силами тренія на стѣнкѣ".

При суммированіи всѣхъ силъ сопротивленій всѣ силы первой группы, очевидно, пропадутъ, такъ какъ всѣ внутреннія силы, проявляющіяся между смежными струйками попарно равны и прямо противоположны по направленію.

Слѣдовательно, въ выраженіе суммы силъ сопротивленій войдутъ лишь силы внѣшняго тренія на стѣнкахъ.

Силу сопротивленія на элементарной полоскѣ стѣнки $d\mathcal{F} = -L d\chi$, гдѣ $d\chi$ выраженіе элемента длины контура живого сѣченія или такъ называемаго смоченнаго периметра, можно выразить черезъ:

$$dR_w = d\mathcal{F} \cdot F(U_0) = -F(U_0) d\chi L$$

гдѣ $F(U_0)$ есть нѣкоторая, зависящая отъ величины мѣстной скорости на стѣнкѣ, величина силы сопротивленія, отнесенной къ единицѣ поверхности стѣнки.

Сумма силъ сопротивленій или "равнодѣйствующая силъ" внѣшняго тренія на стѣнкѣ:

$$R_w = -L \int_\chi F(U_0) d\chi = L\chi F'(U_0),$$

гдѣ χ есть смоченный периметръ (длина контура живого сѣченія, на которомъ жидкость соприкасается со стѣнкою), а $F'(U_0)$ нѣкоторая средняя величина внѣшняго тренія на единицѣ поверхности стѣнки, зависящая отъ средней скорости на стѣнкѣ U_0, рода стѣнки, конфигураціи потока и пр.

Составляя теперь уравненіе равновѣсія, имѣемъ:

$$\gamma\omega(z_1 - z_2) + \omega(p_1 - p_2) - L\chi F'(U_0) = 0$$

или

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = L \cdot \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{F'(U_0)}{\gamma} \quad \ldots \ldots (a)$$

Величина, стоящая въ лѣвой части выраженія (a), есть ничто иное (фиг. 63), какъ разность пьезометрическихъ высотъ въ сѣченіяхъ A и B., т.е. потеря напора h_w. $\frac{h_w}{L} = i$ есть пьезометрическій уклонъ, для случая открытаго русла представляющій ничто иное, какъ уклонъ свободной поверхности потока. Уравненіе (a) поэтому принимаетъ видъ

$$i = \frac{h_w}{L} = \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{F'(U_0)}{\gamma} \quad \ldots \ldots (b)$$

Величину $\frac{\omega}{\chi}$, т.е. отношеніе площади живого сѣченія къ смоченному периметру, называютъ со времени Dubuat (Principes d' hydraulique) "гидравлическимъ радіусомъ" и обозначаютъ обычно черезъ $R = \frac{\omega}{\chi}$.

Что касается величины $\frac{F'(U_o)}{\gamma}$, то, принимая во вниманіе, что въ равномѣрномъ движеніи при данной конфигураціи потока и характерѣ стѣнокъ распредѣленіе скоростей по сѣченію является вполнѣ опредѣленнымъ,- какъ отдѣльныя скорости на стѣнкахъ, такъ и величина средней скорости на стѣнкахъ могутъ быть выражены черезъ величину средней скорости сѣченія U, а потому, очевидно, возможно написать:

$$\frac{F'(U_o)}{\gamma} = \frac{F(U)}{\gamma}$$

т.е. выразить черезъ среднюю скорость сѣченія U также и величину равнодѣйствующей силъ тренія на стѣнкахъ. Вмѣсто (b) имѣемъ

$$i = \frac{1}{R} \cdot \frac{F(U)}{\gamma}$$

или

$$Ri = \frac{F(U)}{\gamma} \qquad (c)$$

Величина $\frac{F(U)}{\gamma}$ опредѣляется эмпирически изъ опытовъ надъ равномѣрнымъ движеніемъ въ прямолинейныхъ водотокахъ.

Въ слѣдующемъ параграфѣ мы приведемъ получающіяся при этомъ и употребляемыя въ практикѣ соотношенія. Теперь еще приведемъ нѣкоторыя сопоставленія для болѣе полнаго уясненія разсматриваемыхъ явленій. Величина $\frac{F(U)}{\gamma} = \frac{F'(U_o)}{\gamma}$ представляетъ собой, согласно вышеизложенному, величину, отнесенной къ единицѣ вѣса жидкости силы сопротивленія на единицѣ площади стѣнки, выраженной въ зависимости отъ средней скорости сѣченія. Выше (§ 23) было выведено, что величина пьезометрическаго уклона въ случаѣ равномѣрнаго установившагося движенія представляетъ собой величину работы всѣхъ силъ сопротивленія, отнесенныхъ къ единицѣ вѣса жидкости на единицѣ длины потока.

Сопоставляя (c) видимъ, что работа силъ сопротивленія на единицѣ длины, отнесенная къ единицѣ вѣса жидкости также равна

$$i = \frac{F(U)}{R \cdot \gamma}.$$

Умножая i на L и на γQ — вѣсъ протекающей въ единицу времени черезъ сѣченіе жидкости, получаемъ

$$N_n = h_w Q\gamma = Li\gamma Q$$

полную работу всѣхъ силъ сопротивленій въ единицу времени (мощность) на участкѣ длиною L; очевидно

$$R_n = N_n \Delta t = Li\gamma Q\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

представляетъ такую же работу, но лишь за промежутокъ времени Δt.

Величину R_n (d) можно переписать слѣдующимъ образомъ:

$$N_n = L\gamma Q \frac{F(U)}{R\gamma} = L \cdot \omega \cdot U \frac{\chi}{\omega} F(U) = L\chi F(U) \cdot U$$

или

$$N_n = \mathcal{F} \cdot F'(U_0) U$$

и

$$R_n = N_n \Delta t = \mathcal{F} \cdot F'(U_0) U \Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

гдѣ $\mathcal{F} = L\chi$.

Такимъ образомъ, полная работа сопротивленій на отсѣкѣ длины L за нѣкоторый промежутокъ времени Δt получится, если умножить равнодѣйствующую силъ внѣшняго тренія на боковой поверхности отсѣка $\mathcal{F} \cdot F'(U_0)$ на *перемѣщеніе* $\Delta s = U\Delta t$, соотвѣтствующее средней скорости U

Полная работа силъ сопротивленія R_n составляется изъ работы внѣшнихъ треній на стѣнкѣ R_c и изъ работы силъ внутренняго тренія $R_в$ частицъ между собой:

$$R_n = R_c + R_в.$$

На самомъ дѣлѣ, хотя сумма всѣхъ внутреннихъ силъ тренія и равна нулю, но работа ихъ нулю не равна по той причинѣ, что скорости смежныхъ струй различны; благодаря этому попарно равныя и противоположныя силы тренія между двухъ смежныхъ струй при составленіи выраженія работъ умножаются на различныя перемѣщенія.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ оказывается возможнымъ очень просто произвести раздѣленіе потерь, т. е. опредѣлить какую часть изъ полной работы сопротивленій R_n составляетъ работа тренія на стѣнкѣ R_c и какую - работа внутреннихъ треній R_b. Разсмотримъ напримѣръ, случай, когда скорость на стѣнкѣ всюду одинакова (U_0)(труба круглаго сѣченія и т.д.). Въ этомъ случаѣ работа силъ сопротивленія на стѣнкѣ на участкѣ длины L за промежутокъ времени Δt получится, умножая равнодѣйствующую силъ внѣшнихъ треній $\mathcal{F}\cdot F(U_0)$ на одинаковое для всѣхъ элементовъ поверхности перемѣщеніе $U_0 \Delta t$.

Такимъ образомъ,

$$R_c = \mathcal{F}\cdot F(U_0)\, U_0 \Delta t$$

Сопоставляя съ (е) имѣемъ:

$$\frac{R_c}{R_n} = \frac{\mathcal{F}\cdot F(U_0)\, U_0 \Delta t}{\mathcal{F}\cdot F(U)\, U \Delta t} = \frac{U_0}{U}$$

т.е. отношеніе работъ внѣшнихъ силъ тренія на стѣнкѣ къ полной работѣ силъ сопротивленій равно отношенію скорости на стѣнкѣ къ средней скорости сѣченія.

Очевидно:

$$\frac{R_b}{R_n} = 1 - \frac{U_0}{U}.$$

Опытъ показываетъ, что съ увеличеніемъ шероховатости отношеніе $\frac{U_0}{U}$ уменьшается; такимъ образомъ оказывается, что чѣмъ шероховатѣе стѣнка, тѣмъ большая часть энергіи тратится внутри жидкости и тѣмъ меньшая - на стѣнкѣ. Это обстоятельство, казалось бы съ перваго взгляда парадоксальное, дѣлается, однако, вполнѣ понятнымъ, если принять во вниманіе, что разсѣяніе энергіи внутри потока обусловливается "степенью" безпорядочности движенія, которая въ свою очередь опредѣляется именно шероховатостью стѣнки*).

---

*) *Подробности см. Б. А. Бахметевъ. "О неравн. движ. жидкости". Стр. 23 - 25.*

32. *Видъ $\frac{F(U)}{\gamma}$, выражающій величину сопротивленій въ безпорядочномъ движеній.*

Выше уже было указано, что величина сопротивленій въ безпорядочномъ движеніи пропорціональна примѣрно квадрату скорости. Въ первой половинѣ прошлаго столѣтія господствовалъ при томъ взглядѣ, что величина сопротивленій не зависитъ отъ рода стѣнки. Взглядъ этотъ въ наиболѣе полной и отчетливой формѣ былъ высказанъ въ 1804 г. знаменитымъ инженеромъ и директоромъ École des Ponts et Chaussées Prony въ его классическомъ сочиненіи "Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes", составившимъ въ свое время эпоху въ исторіи гидравлики и, какъ было выше указано, опредѣлившимъ на цѣлое полстолѣтіе образъ мыслей въ этомъ вопросѣ.

Согласно Prony

$$Ri = \frac{F(U)}{\gamma} = aU + bU^2 \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

гдѣ a и b нѣкоторые постоянные, независящіе отъ рода стѣнокъ коэффиціенты. Для трубъ Prony вывелъ путемъ крайне тщательнаго анализа данныхъ ряда опытовъ различныхъ изслѣдователей $a = 0{,}000017$; $b = 0{,}000348$. Уже изъ значеній коэффиціентовъ видно, что при сколько нибудь значительныхъ скоростяхъ превалируетъ второй членъ выраженія (a), т.е. сопротивленіе дѣлается приблизительно пропорціональнымъ квадрату скорости.

Формулу можно переписать еще въ видѣ:

$$Ri = U^2\left(b + \frac{a}{U}\right) = b'U^2, \quad \text{гдѣ} \quad b' = b + \frac{a}{U} \quad \ldots (b)$$

Недоразумѣнія, происходившія на практикѣ при примѣненіи формулы Prony (и другихъ подобно ему не учитывавшихъ вліянія шероховатости стѣнки и стремившихся исправить формулу Prony замѣной его коэффиціентовъ другими также постоянными и "годными" для всяческихъ условій), заставили пересмотрѣть этотъ вопросъ цѣликомъ.

Въ 1849 году главный инженеръ Парижскаго водопровода H. Darcy предпринялъ знаменитые свои опыты надъ движеніемъ воды въ водопроводныхъ трубахъ. (Опыты окончены въ 1851 г.; описаніе ихъ: Recherches expérimentales sur le mouvement de

l'eau dans les tuyaux de conduites P. 1857). Въ 1855 году начались опыты того же инженера надъ движенiемъ воды въ открытыхъ каналахъ. Опыты эти были окончены уже послѣ смерти Darcy его бывшимъ помощникомъ Bazin'омъ (Recherches hydrauliques par H. Darcy et Bazin. P. 1865)*). Результаты этихъ классическихъ опытовъ совершенно перевернули державшiеся до того времени взгляды Prony.

Основной, наиболѣе важный результатъ опытовъ Darcy и Bazin'а состоялъ въ томъ, что было непосредственно доказано то огромное влiянiе, которое оказываетъ на сопротивленiя состоянiе стѣнки. Такъ изъ опытовъ Darcy надъ трубами выяснилось, что для чугунной водопроводной трубы одного и того же дiаметра и одинаковой длины, сопротивленiе при одинаковомъ расходѣ можетъ увеличиться почти въ два раза, если вмѣсто новой трубы взять старую, бывшую уже много лѣтъ въ эксплоатацiи, благодаря чему стѣнки трубы покрыты осадкомъ, сильно увеличивающимъ шероховатость.

Еще болѣе разительнымъ примѣромъ служитъ опытъ Darcy и Bazin'а, относящiйся къ 1856 г., въ которомъ въ одномъ и томъ же экспериментальномъ каналѣ стѣнки послѣдовательно устраивались изъ различныхъ матерiаловъ. При одномъ и томъ же уклонѣ и расходѣ получались при этомъ совершенно различныя скорости. Въ формулѣ

$$Ri = bU^2$$

получились слѣдующiя значенiя b, собранныя въ таблицѣ (см. стр. 96), въ которой для сравненiя приведенъ и соотвѣтствующiй тѣмъ же условiямъ коэффицiентъ b' по Prony (b).

Что касается вида общей формулы, выражающей сопротивленiя, то изъ своихъ опытовъ Darcy и Bazin заключили, что отклоненiя отъ пропорцiональности квадрату скорости незначительны, и потому нѣтъ нужды въ формулѣ подобной (а) оставлять

---

*) *Оба эти классическiя сочиненiя по гидравликѣ удостоились одобренiя Французской Академiи и были напечатаны въ ея мемуарахъ* (Savants étrangers). *Изученiе этихъ сочиненiй (особенно второго) и въ настоящее время доставляетъ живѣйшее удовольствiе по ясности и глубинѣ мысли, ширинѣ затронутаго матерiала и образцовой постановкѣ гидравлическаго эксперимента.*

Таблица.

(Каналъ шириною 2 м.; $i = 0,005$; $Q = 1,236$).

(Rech. Hydr.).

Родъ стѣнки	b изъ опыта	b' по Prony	$b \times 2g = f$
Цементная штукатурка	0,000172	0,000327	0,00337
Доски	0,000229	0,000329	0,00450
Кирпичи	0,000277	0,000330	0,00545
Мелкій гравій (1-2 см.)	0,000472	0,000335	0,00925
Крупный гравій (3-4 см.)	0,000661	0,000338	0,0130

членъ, пропорціональный первой степени скорости. Наоборотъ, они замѣтили, что при одной и той же скорости и одинаковомъ матеріалѣ стѣнки, сопротивленіе нѣсколько уменьшается вмѣстѣ съ увеличеніемъ гидравлическаго радіуса сѣченія. Поэтому въ результатѣ опытовъ были предложены формулы вида:

$$\frac{R \cdot i}{U^2} = b = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{R}\right) \quad \cdots \cdots (35)$$

Для чугунныхъ новыхъ трубъ (опыты Darcy обнимали діаметры отъ 0,012 м. до 0,5 м.; скорости при этомъ измѣнялись отъ 0,16 м. до 5 м/s) принимая во вниманіе, что для круглаго сѣченія гидравлическій радіусъ $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}$, Darcy далъ для метроваго размѣра)

$$\frac{D \cdot i}{4} = U^2\left(0{\cdot}000507 + \frac{0{\cdot}00001294}{D}\right)$$

Для открытыхъ каналовъ формула сохранила видъ (35) причемъ коэффиціенты α и β были даны для 5 категорій (родовъ)

стѣнокъ различной степени шероховатости.

При рѣшеніи вопросовъ, касающихся движенія воды въ открытыхъ руслахъ, соотношенія изображаютъ обычно въ иной формѣ, а именно, полагая $\frac{1}{b} = c^2$, пишутъ:

$$U = \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{Ri} = \frac{\sqrt{Ri}}{\sqrt{\alpha(1+\frac{\beta}{R})}} = C\sqrt{Ri} \qquad (35^{bis})$$

Въ 1897 году Bazin нѣсколько упростилъ формулу (35) предложивъ выражать величину C слѣдующимъ образомъ:

$$C = \frac{a}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

гдѣ a - постоянная для данной размѣрности величина, а перемѣнной вмѣстѣ съ шероховатостью стѣнки является одна лишь величина γ.

Для метроваго размѣра Bazin придалъ своей "новой" формулѣ видъ:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

причемъ нашелъ удобнымъ дать величину γ для шести слѣдующихъ категорій стѣнокъ:

1.	Очень гладкія стѣнки (цэментная штукатурка, строганныя доски)	0,06
2.	Гладкія стѣнки (доски, кирпичи, тесовая кладка)	0,16
3.	Бутовая (чистая) кладка	0,46
3^{bis}.	Промежуточная категорія (грубая бутовая кладка, очень правильныя стѣнки въ плотномъ земляномъ грунтѣ, замощенныя стѣнки) . . .	0,85
4.	Земляныя стѣнки въ обычномъ состояніи . .	1,30
5.	Земляныя стѣнки, представляющія исключительное сопротивленіе	1,75

Мы привели здѣсь цѣликомъ таблицу коэффиціентовъ шероховато-

сти "новой" формулы Bazin'a лишь затѣмъ, чтобы уяснить, что сами по себѣ такого рода "категоріи", "степени шероховатости" и пр. являются, очевидно, лишь групповой характеристикой извѣстной группы явленій. Само собой ясно, что на самомъ дѣлѣ могутъ имѣть мѣсто и всѣ промежуточныя между приведенными величинами значенія γ. При построеніи практическихъ формулъ дѣло, очевидно, идетъ лишь о томъ, чтобы объединить болѣе или менѣе однородныя явленія и характеризовать полученную группу нѣкоторымъ среднимъ групповымъ коэффиціентомъ.

Совершенно ясно, что точность вычисленій, основанныхъ на подобныхъ формулахъ, сравнительно невелика; лишь если имѣются данныя опыта для условій, совершенно подобныхъ тѣмъ, которыя имѣются въ виду воспроизвести, можно съ увѣренностью ожидать полнаго совпаденія результатовъ расчета съ дѣйствительностью. Въ противномъ случаѣ надо всегда быть готовымъ къ нѣкоторымъ несоотвѣтствіямъ въ этой области.

Вообще говоря, всѣ гидравлическія явленія можно раздѣлить на два большихъ класса: 1) явленія, въ которыхъ преобладаетъ треніе, вызванное шероховатостью стѣнокъ, - и обратно 2) явленія, въ которыхъ треніе о стѣнки не играетъ существенной роли.

Примѣромъ перваго рода является движеніе въ трубахъ и каналахъ; примѣромъ второй группы явленій - истеченіе черезъ отверстіе, водосливъ и пр.

Во второй группѣ явленій всѣ соотношенія количественно устойчивы; поэтому расчеты могутъ быть производимы съ очень большой точностью; явленія при этомъ могутъ легко быть полностью воспроизводимы и повторяемы. Оба эти обстоятельства служатъ причиною, почему такого рода явленіями пользуются въ качествѣ *"измѣрителей"*. Обратно, - въ первой группѣ, благодаря разнообразію возможныхъ состояній стѣнокъ (въ зависимости отъ матеріаловъ и ихъ обработки) всѣ соотношенія измѣнчивы и непостоянны; двѣ трубы, казалось бы, одинаковаго издѣлія всегда обнаруживаютъ нѣкоторое несогласіе въ величинѣ сопротивленій. Ясно, что пользованіе явленіями второго рода въ качествѣ измѣрителей совершенно недопустимо. Очевидно, что въ подобнаго рода случаяхъ нѣтъ никакого смысла считать съ большой точностью, стремиться получать результаты съ большимъ числомъ знаковъ.

Изложенное выше опредѣленіе коэффиціента шероховатости стѣнки, какъ средней групповой характеристики, вполнѣ объясняетъ тотъ просторъ, который можетъ быть въ установленіи основныхъ группъ явленій. Это и служитъ причиной появленія того огромнаго числа всякаго рода формулъ, которыя предложены для выраженія основного соотношенія (35). Мы приведемъ нѣкоторыя главнѣйшія формулы въ дальнѣйшемъ, въ спеціальныхъ главахъ, посвященныхъ движенію воды въ трубахъ и каналахъ. Теперь же вернемся еще къ общему обсужденію основного соотношенія (35):

Выраженіе

$$i = \frac{bU^2}{R} = \frac{U^2}{C^2} \cdot \frac{1}{R}$$

можно преобразовать въ

$$i = \frac{f}{R} \cdot \frac{U^2}{2g},$$

гдѣ, очевидно,

$$f = b \cdot 2g = \frac{2g}{C^2}.$$

Формула Darcy для новыхъ чугунныхъ водопроводныхъ трубъ при этомъ пріобрѣтаетъ видъ:

$$i = \frac{4 \cdot b}{D} U^2 = \sim 0.005\left(1 + \frac{1}{40D}\right)\frac{4}{D} \cdot \frac{U^2}{2g},$$

такимъ образомъ $f = \sim 0.005\left(1 + \frac{1}{40D}\right)$

Въ практическихъ приложеніяхъ ее обычно принимаютъ въ формѣ

$$i = \frac{h_w}{L} = \lambda \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \qquad (36)$$

гдѣ

$$\lambda = 4f = 0.02\left(1 + \frac{1}{40D}\right).$$

Преимущество выраженія сопротивленій черезъ коэффиціентъ $f = 2gb$ заключается въ томъ, что величина f не имѣетъ измѣренія, является просто численнымъ коэффиціентомъ, одинаковымъ для всѣхъ мѣръ, тогда какъ C имѣетъ измѣреніе $\frac{L^{1/2}}{T}$ (т.е. корня изъ ускоренія), а b обратную ускоренію величину и слѣдо-

вательно, численныя значенія ихъ измѣняются въ зависимости отъ того, въ какихъ мѣрахъ производить расчетъ.

Такъ какъ i есть работа силъ сопротивленія на единицѣ длины, отнесенная къ единицѣ вѣса жидкости, а $\frac{U^2}{2g}$ кинетическая энергія, заключающаяся въ единицѣ вѣса жидкости, то величина $\frac{f}{R}$ измѣряетъ работу силъ сопротивленій на единицѣ длины, отнесенную къ кинетической энергіи, заключенной въ данномъ объемѣ жидкости.

Величина

$$f\cdot\frac{U^2}{2g} = bU = Ri = \frac{F(U_o)}{\gamma}$$

представляетъ изъ себя также отнесенную къ единицѣ вѣса силу тренія, приходящуюся въ безпорядочномъ движеніи на единицу поверхности стѣнки.

Величину f будемъ вмѣстѣ съ Unwin'омъ (Treatise on hydraulics. 1897, стр. 133) называть коэффиціентомъ тренія жидкости о стѣнку.

Unwin приводитъ слѣдующія величины коэффиціентовъ тренія, полученныхъ при движеніи въ безграничной водѣ широкихъ плоскихъ фигуръ.

Таблица

Родъ поверхности:	f
Свѣже-окрашенное желѣзо	0,0049
Крашенная строганная доска	0,0035
Поверхность жел. корабля (Rankine)	0,0036
Поверхность, покрытая лакомъ (Froude)	0,0026
Поверхность покрытая пескомъ различной крупности.	0,004-0,008

Какъ видимъ, коэффиціентъ тренія Darcy $f = \backsim$ 0,005 близокъ къ коэффиціенту перваго ряда таблицы.

Величина коэффиціента тренія f приведенная въ послѣдней графѣ таблицы (опытъ Darcy Bazin'a) во всякомъ случаѣ одного порядка съ коэффиціентомъ табл. на стр. 96.

Къ подобнымъ же величинамъ привели Unwin'a опыты надъ треніемъ при вращеніи дисковъ. (См. Enc. Brit. 11 изд. т. XIV, стр. 57).

33. Показательныя формулы.

Въ формулахъ Darcy-Bazin'а сопротивленія принимаются пропорціональными квадрату скорости. На самомъ дѣлѣ, какъ мы указали еще въ началѣ главы, сопротивленія въ безпорядочномъ движеніи пропорціональны не квадрату, а степени лишь близкой ко второй. Это обстоятельство и приводитъ къ типу формулъ, подобныхъ выраженію Prony

$$\frac{Ri}{U^2} = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{U}\right)$$

измѣненіемъ коэффиціента b, исправляющаго неправильность основного построенія формулы.

Всего лучше всѣ эти явленія учитываются примѣненіемъ такъ называемыхъ показательныхъ формулъ, т.е. соотношеній вида:

$$i = \frac{h_w}{L} = \frac{k.U^n}{R^m}$$

гдѣ k нѣкоторый коэффиціентъ, зависящій лишь отъ шероховатости стѣнокъ, а постоянныя n и m показатели степени, указывающія зависимость сопротивленій отъ той или иной степени скорости и гидравлическаго радіуса. Нанося на графикъ результаты опытовъ въ логариѳмической шкалѣ (т.е. примѣняя логариѳмическія анаморфозы), непосредственно изъ чертежа находятъ величины k, n и m. Показательныя формулы были предложены еще въ 60-хъ годахъ прошлаго столѣтія Saint-Venant'омъ и Hagen'омъ.

Въ настоящее время формулы эти въ большомъ употребленіи, преимущественно у англійскихъ и американскихъ гидравликовъ; практическое пользованіе ими дѣлается особенно удобнымъ въ графической интерпретаціи въ видѣ номограммъ (см. II часть).

Unwin (см. Hydraulics. стр. 217) далъ для метрическаго и футового размѣра на основаніи подробнаго анализа очень большого числа опытовъ слѣдующія значенія показателей n, m и коэффиціента k.

Родъ трубы	k		m	n
	метры	футы		
Жесть	0,0169	0,0265	1,10	1,72
Желѣзо	0,0131	0,0226	1,21	1,75
Желѣзо, крытое асфальтомъ	0,0183	0,0254	1,13	1,85
Клепанная желѣзн. труба	0,0140	0,0260	1,39	1,87

Родъ трубы	k		m	n
	метры	футы		
Чугунная труба (новая)	0.0166	0.0215	1.17	1.95
Чугунная труба (очищенная)	0.0199	0.0243	1.17	2.0
Чугунная тр. (загрязненная)	0.0364	0.0440	1.16	2.0

Изъ таблицъ ясна причина, побудившая Darcy признать для выраженія сопротивленій чугунныхъ трубъ простую формулу (36).

Крайне интересную попытку построить для трубы универсальную формулу, обнимающую всѣ формы движеній далъ Reynolds.

Въ самой общей формѣ можно написать

$$dp = k.\mathcal{D}^x.\eta^y.\varrho^z.U^n.l \qquad (I)$$

соотношеніе, лишь выражающее общую зависимость паденія давленія вдоль трубы отъ всѣхъ возможныхъ факторовъ*).

Подставляя теперь величины размѣрности входящихъ въ выраженіе (1) величинъ, получаемъ

$$\frac{M.L}{T^2.L^2} = k.(L)^x.\left(\frac{M}{LT}\right)^y.\left(\frac{M}{L^3}\right)^z.\left(\frac{L}{T}\right)^n.L = k.L^{x-y-3z+n+1}\cdot M^{y+z}\cdot T^{-(y+n)}$$

Такъ какъ показатели при величинахъ L, M и T должны быть въ обѣихъ частяхъ уравненія одинаковы, то получаемъ систему уравненій

$$\left.\begin{aligned} x-y-3z+n+1 &= -1,\\ y+z &= 1,\\ -(y+n) &= -2, \end{aligned}\right\} \text{рѣшая имѣемъ} \left\{\begin{aligned} x &= n-3,\\ y &= 2-n,\\ z &= n-1; \end{aligned}\right.$$

откуда

$$\frac{\Delta p}{l} = k'\cdot\mathcal{D}^{n-3}\cdot\eta^{2-n}\cdot\varrho^{n-1}\cdot U^n$$

или замѣняя ϱ черезъ $\frac{\gamma}{g}$

$$\frac{\Delta p}{l.\gamma} = i = \left(\frac{k'}{g^{n-1}}\right)\cdot\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^{2-n}\left(\frac{U^n}{d^{3-n}}\right) = const\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^{2-n}\cdot\frac{U^n}{d^{3-n}} \qquad (II)$$

Согласно этой формулѣ вліяніе вязкости, діаметра и пр. зависитъ отъ значенія показателя n.

---

*) *Въ выраженіи этомъ* η *— коэффиціентъ внутренняго тренія;* $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ *— масса единицы объема.*

Если $n = 2;\ 2 - n = 0$

$$i = const \frac{U^2}{d},$$

имѣемъ формулу Darcy (36)

Если $n = 1$ (струйчатое движеніе $u < u_{cr}$) получаемъ

$$i = const \frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{U}{d^2}$$

т.е. формулу Poiseuille-Hagenbach'a для капиллярныхъ трубокъ.

Величина $\frac{\eta}{\gamma}$ зависитъ отъ температуры; по буквальному смыслу ур-нія (II) сопротивленіе лишь въ томъ случаѣ вовсе не зависитъ отъ температуры если $n = 2$; если $n < 2$, то сопротивленіе и въ безпорядочномъ движеніи должно нѣсколько зависѣть отъ вязкости и уменьшаться съ возрастаніемъ температуры.

Съ этимъ согласуются результаты опытовъ M. Mair'a надъ сопротивленіемъ въ чистой $1\frac{1}{2}$ дюймовой латунной трубѣ при различныхъ температурахъ.

Въ этихъ опытахъ, n оказалось равнымъ 1.795.

Вотъ среднія значенія коэффиціента тренія f при различныхъ температурахъ для скоростей отъ 4 до 9 фут.

t Cels.	14°	43°	71°
f	отъ 0.0044 до 0.0052	отъ 0.0037 до 0.0041	отъ 0.0035 до 0,0038

*)

34. *Выраженіе внутренняго тренія въ безпорядочномъ движеніи по* Boussinesq'y.

Приведенныя въ предыдущихъ §§ соотношенія даютъ общую оцѣнку работы сопротивленій во всемъ сѣченіи и тѣмъ самымъ служатъ основаніемъ для рѣшенія цѣлаго ряда вопросовъ практической гидравлики, поскольку приходится искать соотношенія между полнымъ расх. или средн. скоростью, уклономъ и пр. Однако все вышеизложенное не даетъ еще детальной картины движенія, не можетъ, напримѣръ, установить даже сколько нибудь

---

*) Enc. Brit. XI изд. ст. Hydraulics.

предположительно картину измѣненія скоростей по сѣченію.

Для рѣшенія подобнаго рода вопросовъ необходимо, очевидно, обратиться къ разсмотрѣнію силъ внутренняго тренія, проявляющагося между частицами внутри потока. Для струйчатаго движенія выраженіе внутренняго тренія, построенное на законахъ Ньютона, приведено въ (§ 29)

$$T = F \cdot \eta \frac{du}{dn}$$

Для безпорядочнаго движенія вопросъ все болѣе затрудняется тѣмъ, что реальныхъ струекъ не имѣется, и, говоря о какихъ бы то ни было силахъ въ какой либо точкѣ, надо понимать эти силы опять таки въ среднемъ "статистическомъ" смыслѣ.

Такимъ образомъ постоянная сила T_τ, дѣйствующая въ точкѣ A внутри жидкости по нѣкоторому направленію s получается, приравнивая импульсъ, получающійся отъ дѣйствія этой силы въ теченіе нѣкотораго времени τ, достаточнаго для полученія средняго устойчиваго результата, суммѣ импульсовъ на то же направленіе за то же время τ всѣхъ мгновенныхъ силъ T', дѣйствующихъ каждая въ теченіе малаго промежутка времени δt; слѣдовательно,

$$T_\tau \cdot \tau = \int_0^\tau T' \delta t \quad ; \quad T_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T' \delta t .$$

Эти среднія силы (actions moyennes - (среднія "дѣйствія") Boussinesq'a) въ концѣ концовъ, очевидно, зависятъ отъ среднихъ мѣстныхъ скоростей и ускореній. Такъ напримѣръ, въ медленно измѣняющемся движеніи, оттого, что "среднія" ускоренія въ плоскостяхъ живыхъ сѣченій равны нулю, равны нулю въ нихъ также и "среднія дѣйствія" силъ инерціи, благодаря чему и въ безпорядочномъ движеніи въ случаѣ медленно измѣняющагося движенія давленіе въ плоскостяхъ живыхъ сѣченій распространяется по гидростатическому закону.

Среднія дѣйствія силъ внутренняго тренія направлены касательно къ среднимъ мѣстнымъ скоростямъ, т.е. касательно къ "струямъ" такъ, какъ если бы послѣднія дѣйствительно существовали.

При этомъ Boussinesq предложилъ выражать силы сопротивленія между струйками посредствомъ формулы

$$T_\tau = F \varepsilon \frac{du}{dn} \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

служащей для выраженія силъ тренія въ струйчатомъ движеніи, съ тою лишь разницей, что вмѣсто постояннаго для данной жидкости и температуры коэффиціента вязкости η , входящаго въ уравненіе (А) въ случаѣ струйчатаго движенія, въ выраженіе (В) силы тренія между струями въ безпорядочномъ движеніи входитъ особый перемѣнный по сѣченію *коэффиціэнтъ внутренняго тренія безпорядочнаго движенія,* зависящій, какъ выражается Boussinesq, отъ *степени безпорядочности движенія* (intensité d'agitation tourbillonaire) въ данной точкѣ.

Выше уже было указано, что безпорядочность движенія увеличивается съ возрастаніемъ

1) шероховатости стѣнки,
2) скорости у стѣнки.

Кромѣ этихъ прямыхъ непосредственныхъ факторовъ, обусловливающихъ интенсивность "зарожденія" безпорядочныхъ движеній, увеличенію степени безпорядочности, вообще говоря, содѣйствуютъ:

3) Плотность жидкости,
4) Полнота сѣченія (ampleur de la section Boussinesq'а), т.е. мѣра приходящагося на опредѣленную величину поверхности стѣнки объема потока, въ которомъ зародившіяся на стѣнкѣ безпорядочныя движенія могли бы свободно развертываться.

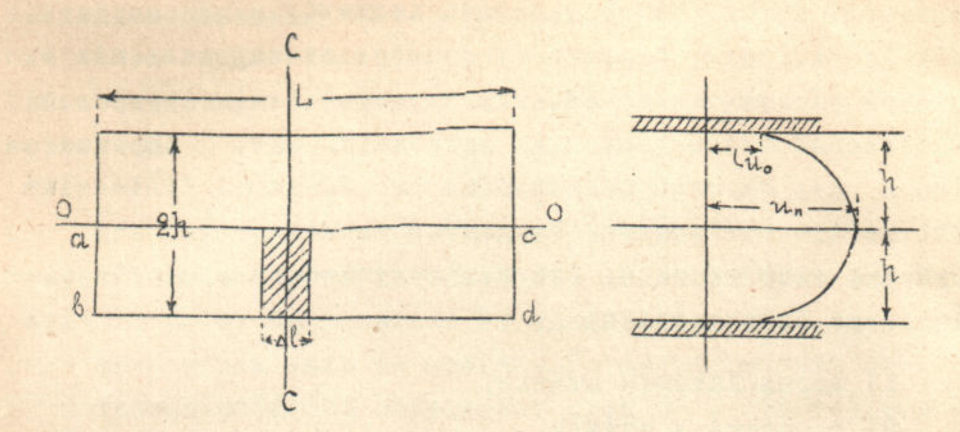
Величина эта непосредственно характеризуется *гидравлическимъ радіусомъ,* какъ величиной измѣряющей отношеніе площади сѣченія къ смоченному периметру, или въ опредѣленномъ отсѣкѣ потока между двумя его живыми сѣченіями отношеніе объема отсѣка къ поверхности стѣнки.

На основаніи вышеизложенныхъ соображеній Boussinesq далъ слѣдующія выраженія коэффиціента тренія въ частныхъ случаяхъ : 1) прямоугольнаго потока безконечной ширины; 2) круглой цилиндрической трубы.

1) Прямоугольный потокъ.

Предположимъ, что ширина прямоугольнаго потока L весьма велика по сравненію съ его высотою $2h$; въ силу этого въ сѣченіяхъ потока $C-C$ достаточно удаленныхъ отъ боковыхъ стѣнокъ движенія одинаковы. Очевидно, кромѣ того, что движеніе симметрично относительно оси $O-O$; случай этотъ одинаково

Фиг. 64.



относится либо къ движенію въ прямоугольной трубѣ, либо въ открытомъ каналѣ, представляющемъ, очевидно, лишь нижнюю половину $abcd$ такой трубы. Въ рассматриваемомъ случаѣ область потока, подчиненная безпорядочнымъ движеніямъ, возникающимъ на нѣкоторой части стѣнки Δl представляетъ собою прямоугольникъ $\Delta l.h$ (заштрихованъ); гидравлическій радіусъ, очевидно, равенъ h.

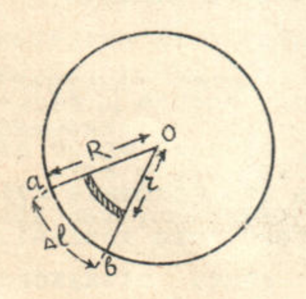
Согласно предположенію Boussinesq'а безпорядочность движенія одинакова во всемъ заштрихованномъ объемѣ и согласно вышеизложенному ε принимаетъ видъ

$$\varepsilon = A.\gamma.H.u_o$$

гдѣ A коэффиціентъ, зависящій отъ шероховатости стѣнки.

2) Для круглой трубы область подчиненная возникающимъ на элементѣ стѣнки Δl безпорядочнымъ движеніямъ представляется въ видѣ фигуры aob.

Фиг. 65.



По мѣрѣ приближенія къ центру зародившіяся на поверхности стѣнки движенія принуждены развертываться во все болѣе и болѣе тѣсномъ пространствѣ; происходитъ какъ бы концентрація безпорядочныхъ движеній; степень безпорядочности, слѣдовательно, по мѣрѣ приближенія къ центру возрастаетъ; возрастаніе безпорядочности происходитъ въ зависимости

отъ величины $\frac{R}{r}$; такимъ образомъ

$$\varepsilon = A \cdot \gamma \cdot u_0 \cdot \frac{R}{2} \varphi\left(\frac{R}{r}\right),$$

гдѣ $\frac{R}{2}$ гидравлическій радіусъ круглаго сѣченія, а $\varphi\left(\frac{R}{r}\right)$ нѣкоторая опредѣленная функція отъ $\frac{R}{r}$.

Въ своихъ первыхъ работахъ (Théorie des eaux courantes.1877) Boussinesq сдѣлалъ относительно функціи φ наиболѣе простое предположеніе, а именно положилъ

$$\varphi\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{R}{r}$$

Полученная при этомъ картина распредѣленія скоростей въ общемъ хорошо совпадала съ результатами опытовъ Darcy надъ распредѣленіемъ скоростей въ трубахъ. Впослѣдствіи Boussinesq, на основаніи болѣе детальнаго экспериментальнаго изученія распредѣленія скоростей въ трубѣ Bazin'омъ, усложнилъ видъ $\varphi\left(\frac{R}{r}\right)$.

Мы вернемся къ этимъ вопросамъ и сопоставимъ выводы Boussinesq'а съ результатами опытовъ во второй части курса. Здѣсь же ограничимся лишь общимъ указаніемъ на достаточно удовлетворительную сходимость опыта и теоріи.

Замѣтимъ еще, что сопротивленія опредѣляются по формулѣ (B) лишь внутри потока, гдѣ измѣненіе скорости непрерывно и $\frac{du}{dn}$ тѣмъ самымъ конечно. На внѣшнихъ границахъ потока у стѣнки, какъ было выше указано, измѣненіе скорости претерпѣваетъ разрывъ; здѣсь, согласно Boussinesq'у, величина сопротивленія на единицѣ поверхности просто равна

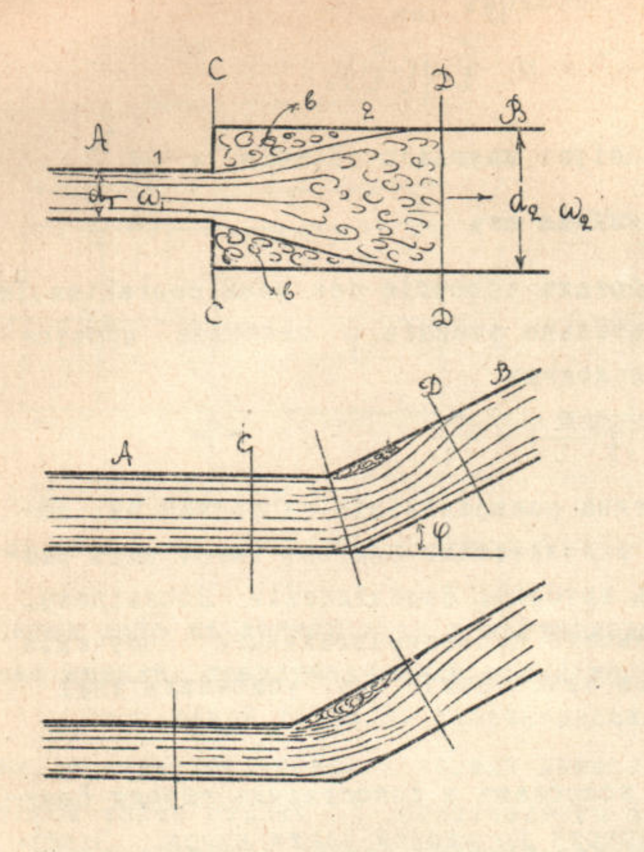
$$\gamma \cdot B \cdot u_0^2.$$

Величина эта въ нашемъ предыдущемъ изложеніи обозначалась $F(u_0)$.

35. *Потери на "ударъ".*

Разсмотримъ теперь обстоятельства, сопровождающія быстрыя измѣненія конфигураціи потока, явленія, которыя принято называть явленіями "удара".

Фиг. 66.



Фиг. (66а) соотвѣтствуетъ "удару" при внезапномъ увеличеніи сѣченія. Въ сѣченіи C труба A (площадь сѣченія ω_1) соединяется съ трубой B (площадь сѣченія ω_2).

Обѣ трубы предполагаются достаточно длинными для того, чтобы влѣво отъ сѣченія C–C и вправо отъ сѣченія D–D установилось равномѣрное движеніе. Въ этихъ частяхъ поэтому имѣютъ мѣсто "нормальныя" потери отъ тренія струй между собой и о стѣнки, разсмотрѣнныя въ предыдущихъ отдѣлахъ. Между сѣченіями C и D имѣется сравнительно короткій переходный участокъ (C–D), на которомъ и происходитъ быстрое измѣненіе режима, происходитъ почти внезапное измѣненіе величины скорости съ $U_1 = \frac{Q}{\omega_1}$ въ сѣченіи C–C на $U_2 = \frac{Q}{\omega_2}$ въ сѣченіи D–D.

Фиг. (66 b) соотвѣтствуетъ удару при внезапномъ измѣненіи направленія потока. Трубы A и B одинаковаго сѣченія и формы въ сѣченіи O–O соединены подъ угломъ φ. Здѣсь такимъ образомъ на переходномъ участкѣ C–D имѣетъ мѣсто быстрое измѣненіе направленія скорости, хотя величина ея остается постоянной. Случай (c) соотвѣтствуетъ одновременному рѣзкому измѣненію, какъ величины такъ и направленія скорости.

Всѣ эти явленія быстраго измѣненія конфигураціи потока сопровождаются значительными потерями энергіи; потери эти, сосредотачивающіяся въ переходныхъ участкахъ, называются обычно потерями "на ударъ".

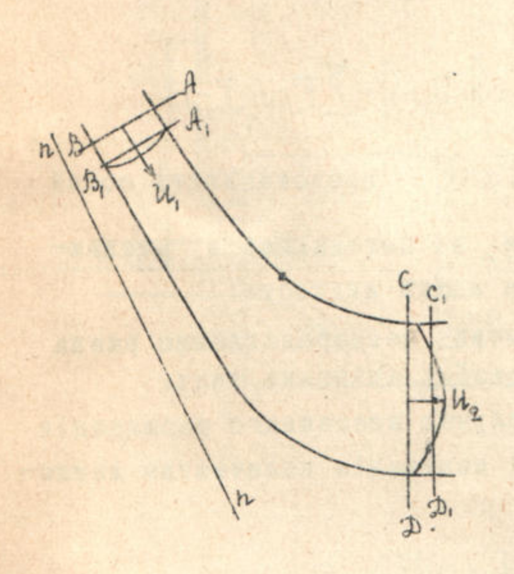
По сравненію съ послѣдними сопротивленія отъ тренія въ

установившемся равномѣрномъ движенiи, вообще говоря, крайне незначительны. Обыкновенно въ предѣлахъ переходныхъ участковъ ими даже совершенно можно пренебрегать, ограничиваясь, такимъ образомъ, при разсмотрѣнiи случаевъ быстраго измѣненiя обстоятельствъ движенiя лишь потерями на "ударъ".

1. *Случай внезапнаго увеличенiя сѣченiя (теорема Борда).*

При разсмотрѣнiи этого вопроса со времени Bélanger *) пользуются закономъ измѣненiя количества движенiя, примѣненнымъ къ находящемуся въ установившемся движенiи потоку жидкости.

Фиг. 67.



Въ потокѣ (фиг. 67) выдѣлимъ отсѣкъ жидкости между двумя живыми сѣченiями AB и CD. Разсмотримъ элементарное перемѣщенiе отсѣка въ теченiе безконечно малаго промежутка времени Δt изъ положенiя $ABCD$ въ положенiе $A'B'C'D'$; очевидно, объемы $ABA'B'$ и $CDC'D'$ равны между собой и равны каждый самъ по себѣ $Q\Delta t$.

Примѣнимъ законъ измѣненiя количества движенiя къ отсѣку на разсматриваемомъ перемѣщенiи. Такъ какъ движенiе установившееся, то измѣненiе количества движенiя отсѣка равно разности количествъ движенiя въ объемахъ $CDC'D'$ и $ABA'B'$, т.е. равно разности $\frac{\gamma}{g} Q\Delta t \alpha U_2$ и $\frac{\gamma}{g} Q\Delta t \alpha U_1$ **); при этомъ векторъ, изображающiй направленiе количества движенiя, совпадаетъ съ направленiемъ среднихъ скоростей U_1 и U_2.

На основанiи закона измѣненiя количества движенiя имѣемъ, что проекцiя на какое нибудь направленiе измѣненiя количе-

---

*) *Знаменитый французскiй инженеръ и профессоръ* Ecole de ponts et chassées. *Приводимое здѣсь разсмотрѣнiе дано имъ въ 40-хъ годахъ въ лекцiяхъ, читанныхъ въ названной выше школѣ.*

**) *Въ этихъ выраженiяхъ коэфф.* α *учитываетъ неодинаковость скоростей въ сѣченiяхъ. См. выше стр. 58.*

ства движенія системы за нѣкоторый промежутокъ времени равна импульсу за то же время проекцій на выбранное направленіе дѣйствующихъ на систему внѣшнихъ силъ*).

Въ примѣненіи къ нашему отсѣку, выбирая направленіе $n-n$ имѣемъ:

$$\frac{\gamma}{g} Q \cdot \Delta t \left(\alpha \cdot U_2 \cos(U_2, n) - \alpha U_1 \cos(U_1, n)\right) = \sum F_i \cos(F_i, n) \cdot \Delta t,$$

гдѣ $\sum F_i$ обозначаетъ сумму всѣхъ дѣйствующихъ на отсѣкъ внѣшнихъ силъ, т.е. давленій въ плоскостяхъ живыхъ сѣченій, а также реакцій стѣнокъ и силъ тренія на нихъ.

Для установившагося движенія, для котораго величины расхода, скоростей и дѣйствующихъ силъ не измѣняется по времени, имѣемъ

$$\frac{\gamma}{g} Q \left[\alpha U_2 \cos(U_2, n) - \alpha U_1 \cos(U_1, n)\right] = \sum F_i \cos(F_i, n).$$

Величины $\frac{\gamma}{g} Q \alpha \cdot U_2$ и $\frac{\gamma}{g} Q \alpha U_1$ представляютъ собой количества движенія, заключенныя въ вытекающей и втекающей въ отсѣкъ въ единицу времени массѣ жидкости.

Разность проекцій этихъ величинъ непосредственно равна суммѣ проекцій дѣйствующихъ на отсѣкъ внѣшнихъ силъ.

Примѣняя вышеизложенное къ случаю внезапнаго расширенія сѣченія имѣемъ для оси о-о (ф.68) измѣненіе количества движенія за единицу времени:

$$\frac{\gamma}{g} Q \Delta t (\alpha_2 U_2 - \alpha_1 U_1).$$

При составленіи импульса силъ пренебрегаемъ, какъ сравнительно малыми, силами тренія струй о стѣнки.

Такимъ образомъ, въ выраженіе импульса войдутъ лишь равнодѣйствующія давленій на площадку $a-a$ въ сѣченіи C, на площадку $d-d$ въ сѣченіи D, равныя соотвѣтственно $F_1 p_1$, и $F_2 p_2$ и, наконецъ, равнодѣйствующая давленій на кольцевую поверхность $a-b$, которую приравниваемъ

$$(F_2 - F_1) p_1'$$

гдѣ p_1' есть нѣкоторое среднее давленіе на эту поверхность.

---

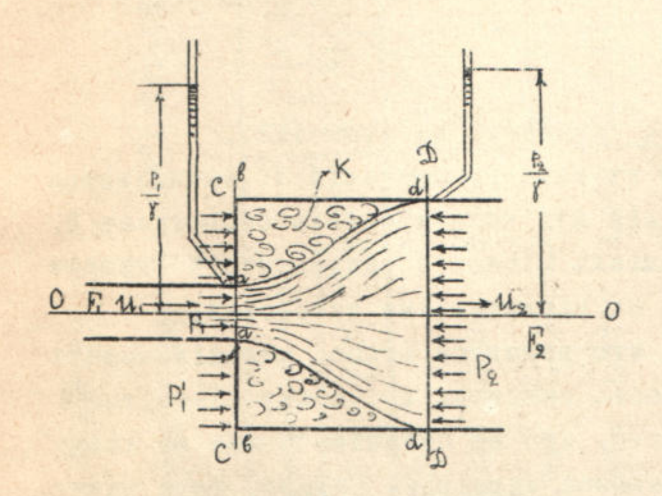
*) *Очевидно, что импульсы внутреннихъ силъ, какъ попарно равныхъ и противоположныхъ, уничтожаются.*

Уравненіе измѣненія количества движенія приметъ видъ:

$$\frac{\gamma}{g} Q(\alpha_0 U_2 - \alpha_0 U_1) = (F_1 p_1 + (F_2 - F_1) p'_1 - F_2 p_2) \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Все затрудненіе, очевидно, въ опредѣленіи давленія p'_1; Bélanger въ своемъ выводѣ предполагаемъ, что среднее давленіе p'_1 равно p_1, давленію въ центрѣ тяжести струи $a-a$. Это предположеніе равносильно тому, что давленіе по всему сѣченію $c-c$ распространяется по гидростатическому закону, т.е. не только въ предѣлахъ струи $a-a$, гдѣ это благодаря параллелизму струй совершенно вѣрно, но также и въ предѣлахъ $a-b$, т. е. кольцевой поверхности, граничащей съ викревымъ мѣшкомъ (K).

Фиг. 58.



Если принять предположеніе Bélanger'a, то изъ ур-ія (α) непосредственно слѣдуетъ, замѣняя $Q = F_2 U_2$ и считая $\alpha_0 = \sim 1$.

$$\frac{U_2^2}{g}\left(1 - \frac{U_1}{U_2}\right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Удѣльная энергія въ сѣченіи D-D

$$E_2 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{U_2^2}{2g} + \frac{2U_2U_1}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g};$$

Такимъ образомъ потеря энергіи (потеря напора) при ударѣ.

$$h_{w\,уд} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Это и есть такъ называемая теорема Borda*), называемая по имени французскаго ученаго, впервые нашедшаго соотношеніе (37).

Соотношеніе (37) въ общемъ достаточно удовлетворительно оправдывается опытомъ. Ясно отсюда, что и предположеніе Bé-

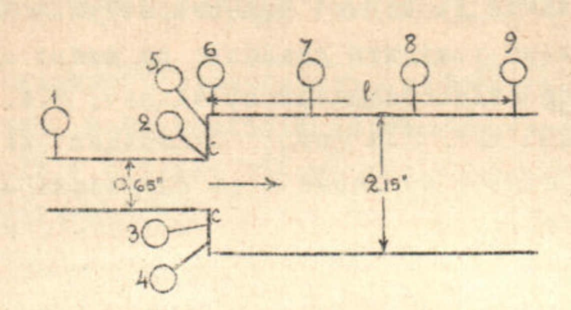
---

*) "Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases par M. le shavalier de Borda (Hist. de l'Ac.R. de Science 1766).

langer'a должно въ общемъ быть правильнымъ.

Gibson въ своемъ курсѣ гидравлики приводитъ данныя опытовъ въ трубахъ, размѣры которыхъ приведены на фиг. 69.

Фиг. 69.



(Таблица изъ Gibson'а приведена на стр. 113).

При этомъ помѣщенныя въ таблицѣ значенія p' вычисляются какъ среднія ариѳметическія изъ показателей пьезометровъ 3, 4 и 5. Какъ видимъ въ опытахъ Gibson'а расходимость теоріи съ опытомъ увеличивается съ увеличеніемъ скоростей.

Намъ представляется, что причиной этого явленія можетъ быть отчасти недостаточность разстоянія l между сѣченіями c-c и манометромъ 9; возможно, что въ сѣченіи 9 еще не успѣвало установиться параллельное движеніе. Однако, тотъ фактъ, что съ увеличеніемъ скоростей возрастаетъ также и расходимость величинъ p и p' указываетъ, что совпаденія теоріи съ опытомъ здѣсь быть не должно, что потери напора должны быть на самомъ дѣлѣ больше, чѣмъ слѣдуетъ по формулѣ Borda.

Вообще говоря, въ приведенномъ выше выводѣ Bélanger самымъ слабымъ мѣстомъ является несомнѣнно именно предположеніе относительно распредѣленія давленій по кольцевой поверхности $a-b$.

Желательно поэтому вовсе избѣжать необходимости такъ или иначе учитывать величину этого давленія.

Самъ Borda получилъ соотношеніе (37), непосредственно примѣняя къ разсмотрѣнію явленія найденныя незадолго передъ тѣмъ Гюйгенсомъ теоремы о потерѣ живой силы при ударѣ неупругихъ тѣлъ.

По Borda, масса жидкости, вытекающая изъ трубы A съ скоростью u_1, нагоняетъ двигающуюся болѣе медленно жидкость

Т а б л и ц а

(Gibson. "Hydraulics and its applications". Стр.84, 1908 г. London).

опытъ	скорость въ футахъ въ сек.		Давленіе по манометру въ фут.						$\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}$	$\frac{P}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}$	потеря напора изъ опыта	вычислен. потеря нап. $\frac{(v-V)^2}{2g}$	относ. дѣйств. потери нап. к вычисл.
	V	v	(1.)	(2)=p	p'	(7)	(8)	(9)=P					
1.	0,262	2,87	0,670	0,655	0,650	0,658	-	0,675	0,783	0,676	0,107	0,1059.	1,011
2.	0,382	4,195	2,10	2,078	2,070	2,083	2,108	2,120	2,351	2,118	0,233	0,226	1,031
3.	0,549	6,01	0,675	0,640	0,622	0,645	0,710	0,719	1,203	0,720	0,483	0,465	1,041
4.	0,8235	9,02	1,480	1,425	1,373	1,440	1,570	1,580	2,690	1,587	1,103	1,041	1,060
5.	1,111	12,19	2,735	2,605	2,545	2,630	-	2,880	4,915	3,199	2,016	1,096	1,058
6.	1,386	15,20	1,04	1,09.	0,962	1,07	1,463	1,490	4,682	1,519	3,163	2,975	1,064
7.	1,657	18,18	1,08	0,885.	0,702	-	1,395	1,425	6,015	1,468	4,547	4,250	1,069
8.	2,185	23,95	1,440	1,170	0,855	1,12	2,04	2,08	10,08	2,154	7,926	7,350	1,08
9.	2,532	27,80	1,750	1,455	1,055	-	2,470	2,535	13,465	2,635	10,830	9,940	1,091
10.	2,841	31,20	2,15	1,21	1,285	-	2,99	3,04	16,930	3,066	13,864	12,49	1,110

въ трубѣ B со скоростью u_2 и ударившись продолжаетъ далѣе двигаться съ нею вмѣстѣ, не разъединяясь, съ общей скоростью u_2 подобно тому, что происходитъ при свободномъ ударѣ неупругихъ шаровъ, или вообще двухъ неупругихъ тѣлъ.

Хотя результатъ, къ которому пришелъ Borda вѣренъ, однако, его выводъ скорѣе блестящая аналогія, чѣмъ результатъ строго-механическаго умозрѣнія. Жидкости по существу вовсе не неупруги и прилагать къ разсматриваемому случаю *непосредственно* теорію удара *свободныхъ неупругихъ* тѣлъ не представляется возможнымъ.

Вопросъ становится совершенно иначе, если разбираемый случай разсматривать съ точки зрѣнія теоріи *неупругаго удара*, какъ послѣдняя разсматривается вообще въ динамикѣ системъ, и если въ частности воспользоваться для опредѣленія потерь такъ называемой теоремой Карно.

Неупругимъ ударомъ въ динамикѣ системы насынается быстрое (почти мгновенное) наложеніе на систему остающихся связей. Отдѣльные элементы системы могутъ состоять изъ тѣлъ упругихъ либо неупругихъ. Это безразлично. Необходимо лишь, чтобы внезапно введенныя въ систему связи сохранялись, не уничтожались. Тѣмъ самымъ послѣ неупругаго удара движенія системы подчиняются новымъ связямъ, т.е. возможны перемѣщенія системы уже иныя, соотвѣтствующія новымъ связямъ, чѣмъ были раньше до удара.

Въ упругомъ ударѣ этотъ "первый" періодъ внезапнаго наложенія связей сопровождается "вторымъ" періодомъ столь же быстраго полнаго ихъ разрушенія; такимъ образомъ, по окончаніи этого періода возможныя перемѣщенія системы тѣ же, что и до удара. В.Л.Кирпичевъ*) предлагаетъ называть "первый" періодъ (наложеніе связей) просто "ударомъ"; второй - разрушеніе связей - "взрывомъ". Такимъ образомъ въ "упругомъ ударѣ" ударъ сопровождается взрывомъ; въ неупругомъ ударѣ взрыва нѣтъ, явленіе ограничивается лишь "ударомъ".

Въ неупругомъ ударѣ величина живой силы, потерянной системой, опредѣляется по такъ называемой теоремѣ Карно. Согласно послѣдней, величина живой силы, потерянная системой, равна живой силѣ, соотвѣтствующей потеряннымъ скоростямъ, т.е. рав-

---

*) *"Бесѣды о механикѣ". Стр. 320.*

на живой силѣ, которую имѣла бы система, если бы каждая точка ея обладала той скоростью, которую она въ результатѣ удара потеряла.

Эта общая теорема даетъ возможность, хотя бы приближенно, рѣшать весьма много вопросовъ въ гидравликѣ. Особенно важно ея примѣненіе въ теоріи гидравлическихъ ротаціонныхъ машинъ (турбинъ, центробѣжныхъ насосовъ и т. д.).

Въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю теорема Карно непосредственно приводитъ къ теоремѣ Борда.

Дѣйствительно, въ нашемъ случаѣ уравненіемъ связи служитъ ур-ніе непрерывности, въ силу котораго скорость въ трубѣ B, при полномъ ея заполненіи, должна имѣть величину

$$U_2 = \frac{Q}{\omega_2} = U_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} .$$

При переходѣ изъ сѣченія CC въ DD налагается связь, въ силу которой скорость должна быстро упасть съ U_1 до U_2. Потерянная скорость:

$$U_1 - U_2 .$$

Живая сила, соотвѣтствующая потерянной скорости, отнесенная къ единицѣ вѣса:

$$h_w = \frac{1}{2g}(U_1 - U_2)^2,$$

т. е. выраженіе (87).

36. *Мѣстныя потери. Коэффиціентъ сопротивленія Weissbach'a.*

Какъ мы видѣли выше, въ случаѣ внезапнаго расширенія сѣченія теорема Карно даетъ результаты, оправдываемые опытомъ. Къ сожалѣнію это почти единственный случай, когда умозрительными соображеніями удается сколько-нибудь удовлетворительно опредѣлить величину потерь. Обыкновенно потери, происходящія при быстрыхъ измѣненіяхъ конфигураціи, потери, которыя въ гидравликѣ принято характеризовать опредѣленіемъ "мѣстныхъ", приходится учитывать посредствомъ тѣхъ или иныхъ эмпирическихъ формулъ. При этомъ большую пользу приноситъ понятіе о такъ называемомъ коэффиціентѣ сопротивленія, введенномъ еще въ 40-хъ годахъ прошлаго столѣтія Weissbach'омъ.

Суть дѣла заключается въ слѣдующемъ. Такъ какъ въ overно-

рядочномъ движенiи сопротивленiя пропорцiональны примѣрно квадрату скорости, то потерю удѣльной энергiи на отсѣкѣ AB потока, въ которомъ нарушено медленноизмѣняющееся движенiе, можно выразить въ функцiи отъ кинетической энергiи $\frac{u^2}{2g}$. При этомъ потери можно отнести либо къ скорости u_1 либо къ u_2. Такимъ образомъ потерю напора h_w на участкѣ AB — можно выразить

$$h_{w_{AB}} = \zeta_{(1)} \frac{u_1^2}{2g} = \zeta_{(2)} \frac{u_2^2}{2g} \quad \ldots \quad (38)$$

гдѣ ζ абстрактное число.

Коэффицiентъ ζ и есть коэффицiентъ сопротивленiя Weissbach'а. Очевидно, такимъ коэффицiентомъ можно характеризовать не только "мѣстныя потери".

Такъ, напримѣръ, для случая прямой цилиндрической трубы длины L и дiаметра d, коэффицiентъ сопротивленiя

$$\zeta = \lambda \cdot \frac{L}{d}$$

Для случая внезапнаго расширенiя, переписывая (37) соотвѣтственно

$$h_w = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} = \frac{u_1^2}{2g}\left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2 = \frac{u_2^2}{2g}\left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2$$

имѣемъ:

$$\zeta_{(1)} = \left(\frac{F_2 - F_1}{F_2}\right)^2 ; \quad \zeta_{(2)} = \left(\frac{F_2 - F_1}{F_1}\right)^2 .$$

Въ справочныхъ книжкахъ приводятся значенiя коэффицiентовъ ζ для различнаго рода мѣстныхъ потерь, какъ, напримѣръ, для случая (фиг.66) внезапнаго измѣненiя направленiя трубъ, закругленiй, водопроводныхъ клапановъ, задвижекъ и пр.

Нѣкоторые изъ этихъ коэффицiентовъ мы воспроизведемъ во II-ой ч. курса. Замѣтимъ лишь, что къ большинству такихъ коэффицiентовъ въ справочникахъ надлежитъ относиться съ осторожностью. Обычно не приводится совершенно данныхъ объ условiяхъ опыта и размѣрахъ испытанныхъ расположенiй. Очень часто приводятся коэффицiенты, полученные еще самимъ Weissbach'омъ изъ сравнительно неболь-

Фиг. 70.



мого числа опытовъ.

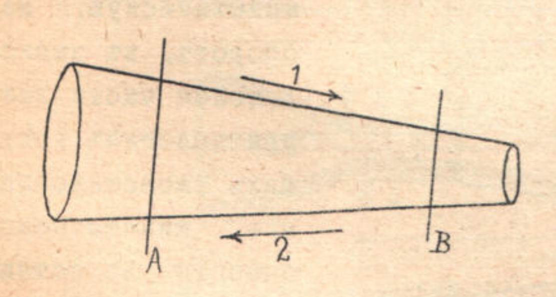
При этомъ вопросъ о томъ, насколько эти формулы общи и насколько по общему построенію онѣ отвѣчаютъ тому или иному явленію, часто даже не подвергается разсмотрѣнію.

Область изученія явленій мѣстныхъ потерь поэтому надо въ общемъ считать почти не изслѣдованной, и здѣсь имѣемъ еще обширное поле дѣятельности, какъ для чисто экспериментальнаго опредѣленія коэффиціентовъ, такъ и для изученія всего явленія въ цѣломъ.

37. Потери въ расходящемся и сходящемся потокѣ.

Разсмотримъ еще вопросъ о потеряхъ въ сходящемся и расходящемся потокѣ. Дѣло въ томъ, что если опредѣлять потерю напора, скажемъ, между сѣченіями A и B при движеніи слѣва направо (въ сходящемся потокѣ) и справа налѣво (въ расходящемся потокѣ), то, какъ показываетъ опытъ, потери эти будутъ далеко не одинаковы. Онѣ будутъ именно много больше въ случаѣ расходящагося потока.

Фиг. 71.

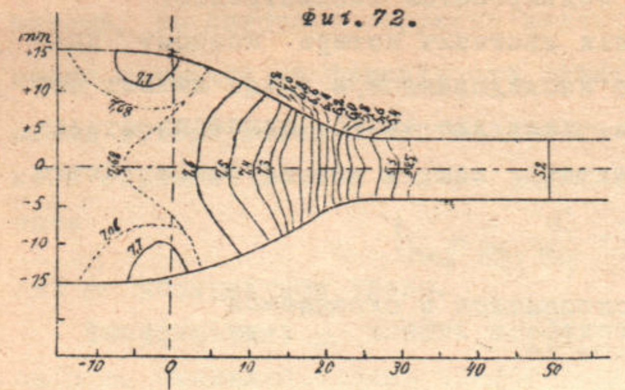


Уже Reynolds отмѣтилъ, что расходящіяся стѣнки (divergent boundaries) увеличиваютъ "степень безпорядочности", сходящіяся-наоборотъ. Расходящіяся стѣнки уменьшаютъ "устойчивость" движенія, благодаря чему величина критической скорости соотвѣтственно понижается по сравненію съ цилиндрической трубой; обратно, при сходящихся стѣнкахъ движеніе изъ струйчатаго переходитъ въ безпорядочное при значительно большихъ скоростяхъ, чѣмъ въ цилиндрической трубѣ; величина критической скорости повышается.

Hochschild *) въ своихъ опытахъ надъ движеніемъ жидкостей въ суживающихся, а затѣмъ расширяющихся каналахъ

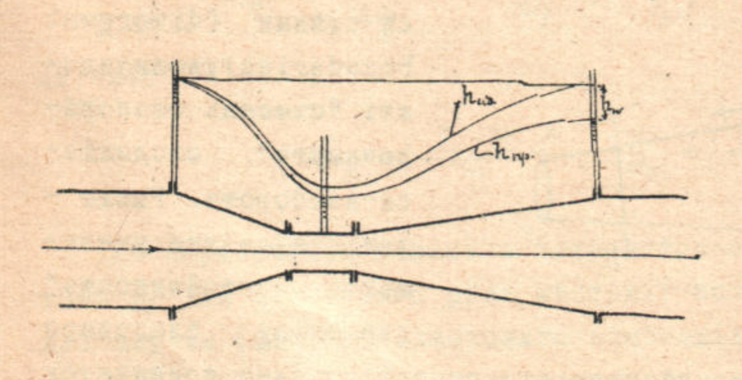
*) Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft. 114. Berlin. 1912.

(одинъ изъ опытныхъ каналовъ приведенъ на фиг.72) показалъ, что въ головной суживающейся части распредѣленіе давленій весьма близко совпадаетъ съ тѣмъ, которое соотвѣтствуетъ потенціальному движенію.


Фиг. 72.

Такимъ образомъ здѣсь вліяніе силъ сопротивленія незначительно, и послѣднія не нарушаютъ существенно картины движенія, получаемой въ предположеніи жидкости идеальной. Наоборотъ, въ расширяющейся части, благодаря усиленной турбуленціи, картина движенія рѣзко разнится отъ соотвѣтствующей потенціальной.

Потери въ расходящемся потокѣ увеличиваются по мѣрѣ увеличенія угла расходимости. Это и служитъ причиной того, почему, напримѣръ, въ водомѣрѣ Вентури сходящаяся часть дѣлается короткой, тогда какъ расходящійся конусъ дѣлается по возможности длиннымъ съ малымъ угломъ расходимости. Въ первой части (фиг.73) потери невелики; потенціальная энергія переходитъ почти полностью въ кинетическую; наоборотъ, въ расходящейся части даже при пологихъ конусахъ возстановленіе кинетической энергіи въ потенціальную совершается съ значительными потерями.


Фиг. 73.

Интересные опыты въ этомъ направленіи произвелъ K. Andres*) Послѣдній передвигалъ черезъ движущуюся въ соплахъ жидкость (одинъ изъ опыт. Andres см. ф.74) соединенную съ манометромъ тоненькую трубочку съ отверстіемъ; устанавливая послѣднюю въ томъ или иномъ сѣченіи, можно было измѣрять величину давленія въ различныхъ сѣченіяхъ потока.

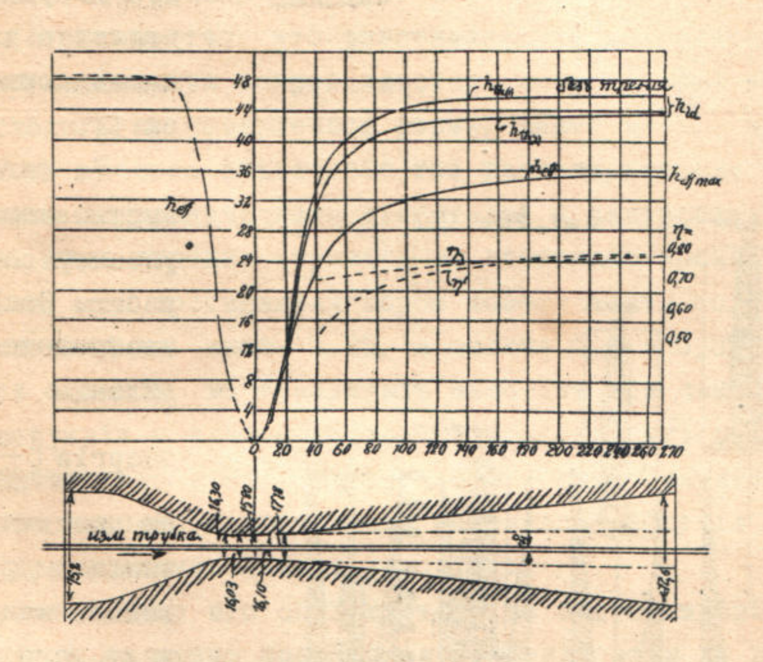
Одна изъ полученныхъ имъ діаграммъ изображена на фиг.74.

---

*) Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft. 76.

Кривая h_{ef} изображаетъ полученную изъ опыта кривую давленій. $h_{th(1)}$, $h_{th(2)}$ представляютъ собою кривыя давленій, вычисленныя по уравненію Бернулли, первая - не принимая во вниманіе никакихъ потерь, 2-ая - считая потери на нормальныя отъ тренія по формулѣ равномѣрнаго движенія. Кривая $\eta = \frac{h_{ef}}{\frac{u_m^2 - u^2}{2g}}$ есть т.назыв. коэффиціентъ возстановленія, т.е. отношеніе дѣйствительной потенціальной энергіи въ сѣченіи къ теоретической, т.е. къ той, которая имѣла бы мѣсто, если бы потерь вовсе не было.

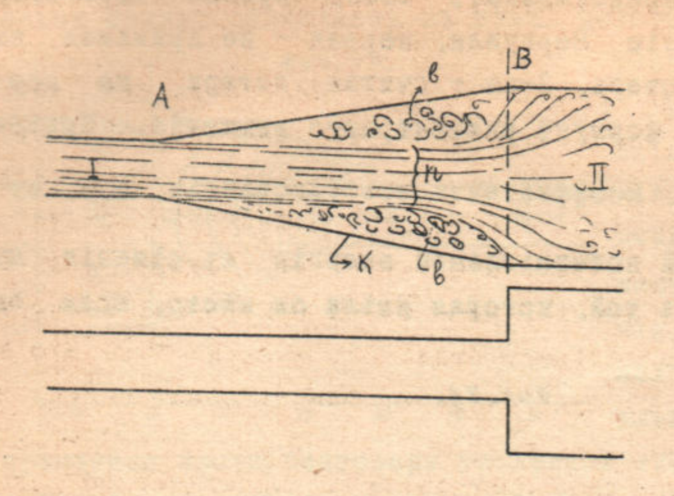
Фиг. 74.



Въ приведенномъ примѣрѣ коэффиціентъ возстановленія сравнительно высокъ, около 0,77; въ случаѣ болѣе рѣзко расходящагося русла коэффиціентъ этотъ падаетъ иногда до 0,52 (см. Andres Табл. стр. 33).

Величина потерь, какъ было выше указано, въ расходящихся потокахъ возрастаетъ съ угломъ расхожденія; при этомъ уже при сравнительно не слишкомъ большомъ углѣ потеря почти что достигаетъ величины, опредѣляемой по теоремѣ Борда; т.е. коническая вставка между труб. I и II какъ будто уже не оказываетъ вліянія; явленіе протекаетъ такъ, какъ если бы трубы соединялись непосредственно, какъ изображено на фиг. 75. Очевидно, надо предполагать, что въ этомъ случаѣ при движеніи

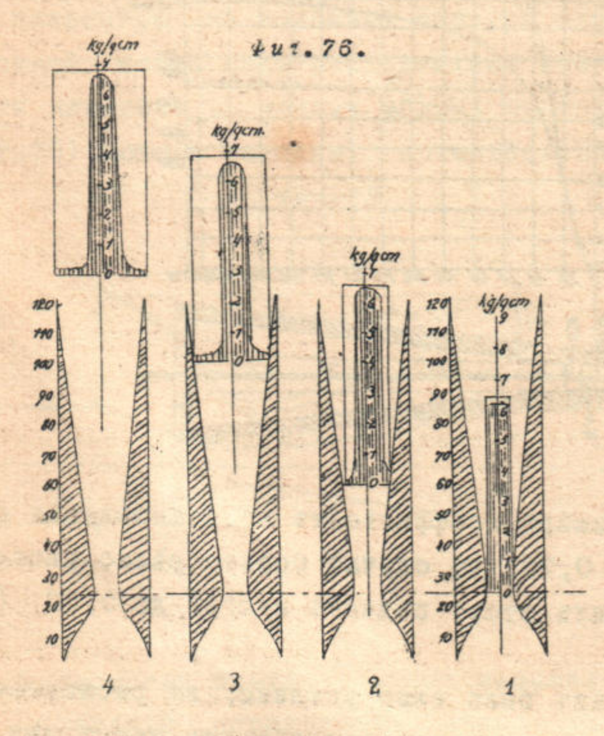
Фиг. 75.



въ расходящейся части K не имѣетъ мѣста непрерывное заполненіе конической части движущимся потокомъ. Повидимому, движущійся потокъ (n) отдѣленъ отъ стѣнокъ вихревымъ мѣшкомъ в и в и въ сѣченіи B ударяется о медленно движущуюся жидкость въ трубѣ II.

На фиг. 76, заимствованной изъ упомянутой выше работы Hochschild'а изображено распредѣленіе полной энергіи $\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right)$ въ различныхъ сѣченіяхъ расширяющагося канала. Въ виду того, что, какъ показали предварительные опыты, давленія въ одномъ и томъ же сѣченіи мало разнятся другъ отъ друга, кривыя на фиг. 76 въ общемъ изображаютъ распредѣленіе скоростей. Указанное выше предположеніе объ отдѣленіи потока отъ стѣнки и образованіи вихревого мѣшка подтверждается этими опытами. Особенно интересна діаграмма (4), изображающая распредѣленіе скоростей уже за предѣлами расширяющейся части, въ цилиндрической трубѣ; какъ видимъ и здѣсь скорости

Фиг. 76.



далеко еще не выравнялись, и струя продолжаетъ течь въ серединѣ трубы, отдѣленная отъ стѣнокъ пространствомъ, наполненнымъ водоворотами.

Въ настоящее время гидравлика не располагаетъ еще достаточнымъ количествомъ опытовъ, которые позволяли бы точно заключить, при какихъ условіяхъ (углахъ расхожденія и скоростяхъ) происходитъ отдѣленіе струи отъ стѣнки и движеніе струи съ поверхностями раздѣла окаймленной вихревыми мѣшками. Есть кое какія основанія предполагать, что съ увеличеніемъ скорости уголъ, при которомъ происходитъ отдѣленіе, уменьшается. Что касается величины угла, то судя по всему онъ невеликъ и при малыхъ скоростяхъ близокъ къ 10°.

То обстоятельство, что возстановленіе кинетической энергіи въ потенціальную сопровождается значительными потерями и не происходитъ въ совершенной формѣ, даетъ намъ, между прочимъ, очень простое объясненіе той разницы, которая наблюдается въ отдачахъ гидравлическихъ двигателей и центробѣжн. насосовъ.

Тогда какъ турбины строятся въ настоящее время настолько совершенно, что достигаются порой коэффиціенты полезнаго дѣйствія значительно выше 0,85, а отдача 0,8 - 0,85 считается уже почти обычной, въ турбинныхъ насосахъ при самой тщательной конструкціи и лучшей постройкѣ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія значительно ниже. Отдачу 0,6-0,7 надо считать нормальной. Болѣе высокіе коэффиціенты полезнаго дѣйствія получаются рѣдко и при исключительныхъ условіяхъ.

Обстоятельство это объясняется, по нашему мнѣнію, тѣмъ, что въ турбинахъ на всемъ протяженіи движенія воды до выхода изъ рабочаго колеса имѣется переходъ потенціальной энергіи въ кинетическую, совершаемый, какъ выше было указано почти безъ потерь. Наоборотъ, въ турбинномъ (центробѣжномъ) насосѣ имѣетъ мѣсто все время переходъ кинетической энергіи въ потенціальную. Связанная съ послѣднимъ неизбѣжность значительнаго разсѣянія энергіи и ведетъ къ тому, что при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ двигатель всегда будетъ совершеннѣе и лучше работать, чѣмъ насосъ.

Хотя фактъ увеличенія потерь въ расходящемся потокѣ былъ извѣстенъ уже давно*), тѣмъ не менѣе къ обстоятельному изуче-

---

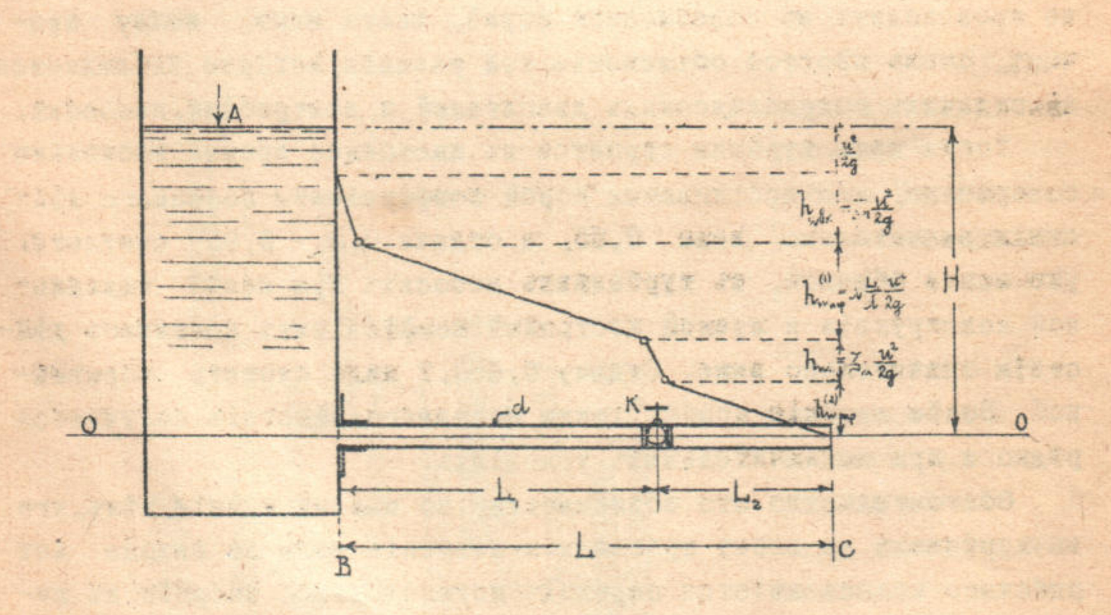
*) *См., напримѣръ, во II-ой части опыта* Francis'а *(60 г.) и* Fliegner'а *(1875 г.) надъ истеченіемъ черезъ конически расходящіеся насадки.*

нію этого вопроса приступили въ самое послѣднее время въ связи съ тѣмъ значеніемъ, которое имѣетъ "возстановленіе кинетической энергіи" въ турбинныхъ насосахъ и пр.

38. *Практическія приложенія уравненія Бернулли. Принципъ наложенія потерь.*

Намѣтимъ теперь общій путь рѣшенія различнаго рода практическихъ вопросовъ, исходя изъ ур-нія Бернулли и пользуясь для выраженія сопротивленіе выводомъ и соображеніями послѣднихъ параграфовъ. Всего лучше это сдѣлать разборомъ ряда отдѣльныхъ случаевъ.

Фиг 77.



I. Истеченіе воды изъ бака A черезъ трубу длиною L = 100 mtr, діаметромъ d = 10 стм., вдѣланную за-подъ-лицо въ стѣнку бака. Въ трубѣ устроенъ водопроводный клапанъ k. Уровень воды въ бакѣ постоянный. Напоръ (превышеніе свободнаго уровня воды въ бакѣ надъ центромъ трубы въ сѣченіи B) H = 10 метровъ.

Веря ось 0 - 0 за плоскость сравненія, напишемъ уравненіе Бернулли для свободной поверхности A и выходного сѣченія трубы C.

Составляя уравненіе имѣемъ:

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{U_a^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + \sum h_w.$$

Въ этомъ выраженіи $\frac{p_a}{\gamma}$ - одинаковыя въ сѣченіяхъ A и C давленія, равныя атмосферному, U_a - средняя скорость въ сѣченіи A, величина, благодаря значительнымъ размѣрамъ сѣченія, малая; U есть скорость въ трубѣ, такимъ образомъ, имѣемъ:

$$H = \frac{U^2}{2g} + \sum h_w.$$

При опредѣленіи $\sum h_w$ придется считаться со слѣдующими отдѣльными потерями:

1) Потеря при входѣ въ трубу, обусловливаемая тѣмъ, что (фиг.78) входя, струя сначала суживается, а затѣмъ расширяется до полнаго сѣченія трубы, причемъ при расширеніи и происходитъ потеря энергіи. Величина этой потери на входъ:

$$h_{w\,вх} = \zeta_1 \frac{U^2}{2g},$$

гдѣ для случая, изображеннаго на фиг.78 $\zeta = \backsim 0{\cdot}5$ (см. 2-ю часть)

Фиг. 78.



2) Потери на прямыхъ участкахъ цилиндрическихъ трубъ длинъ L_1 и L_2, равныя согласно (36)

$$h_{w\,тр_1} = \lambda \cdot \frac{L_1}{d} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad и \quad h_{w\,тр_2} = \lambda \cdot \frac{L_2}{d} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

Примемъ, по Darcy, для новыхъ трубъ

$$\lambda = 0{\cdot}02\left(1 + \frac{1}{40D}\right) = 0{\cdot}025 = \frac{1}{40};$$

3) Потеря въ водопроводномъ клапанѣ, равная

$$h_{w\,кл} = \zeta_к \frac{U^2}{2g}$$

Беремъ ζ для водопроводнаго клапана = 7 *).

При рѣшеніи вопросовъ, подобныхъ поставленному, дѣлаютъ по почину французскихъ гидравликовъ начала XIX стол., предположеніе, что отдѣльныя потери просто складываются, т.е. что общая потеря на опредѣленномъ потокѣ, обусловленная совокупнымъ дѣйствіемъ всѣхъ сопротивленій вмѣстѣ взятыхъ, равна суммѣ отдѣльн. потерь; такой пріемъ *"наложенія потерь"*, съ са-

---

*) *Б. А. Бахметевъ и М. В. Кирпичевъ. О сопротивленіи водопроводныхъ клапановъ. Изв. СПБ. П. И. 1908 г. т. Х.*

маго начала введенный въ гидравлику безъ особаго разсмотрѣнія его допустимости и поддерживаемый традиціей, на самомъ дѣлѣ несомнѣнно неправиленъ. Дѣйствительно, хотя бы для разсматриваемаго случая потери въ прямыхъ трубахъ берутся съ коэффиціентомъ, соотвѣтствующимъ установившемуся, равномѣрному движенію, движенію съ опредѣленной картиной распредѣленія скоростей и съ обусловливаемой таковой безпорядочностью движенія.

Ясно, что, напримѣръ, непосредственно за входнымъ въ трубу участкомъ или послѣ клапана нормальное распредѣленіе скоростей нарушено. Безпорядочность движенія отлична отъ нормальной, соотвѣтствующей равномѣрному установившемуся движенію; очевидно, отличны и сопротивленія.

Въ настоящее время, однако, гидравлика не располагаетъ ни опытнымъ ни теоретическимъ матеріаломъ, достаточнымъ для учета подобнаго рода неправильностей. Поэтому волей не волей, за неимѣніемъ лучшаго, мы принуждены пользоваться принципомъ наложенія потерь, имѣющимъ огромное достоинство простоты и гибкости въ приложеніяхъ.

Къ тому же обратимъ вниманіе на то, что въ наиболѣе важныхъ практическихъ случаяхъ приходится имѣть дѣло съ длинными линіями трубопроводовъ, каналовъ и пр.; въ этомъ случаѣ вліяніе такихъ отклоненій и неправильностей незначительно.

Возвращаясь къ разсматриваемому случаю, составляемъ величину $\sum h_w = H_w$; потерянный напоръ

$$H_w = h_{w\,вх} + h_{w\,тр_1} + h_{w\,кл} + h_{w\,тр_2} = \frac{u^2}{2g}\left(\zeta_1 + \lambda\frac{L_1}{d} + \zeta_{кл} + \lambda\frac{L_2}{d}\right) = \zeta\frac{u^2}{2g}$$

Величина ζ является суммой отдѣльныхъ коэффиціентовъ сопротивленій; мы будемъ называть его общимъ *коэффиціентомъ сопротивленія системы.*

Численно онъ равенъ

$$\zeta = 0{\cdot}5 + \frac{100}{40\cdot 0{\cdot}01} + 7 = 32{\cdot}5.$$

Общее уравненіе:

$$H = \frac{u^2}{2g} + \zeta\frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}(1+\zeta)$$

Численно

$$10 = \frac{u^2}{2g}(1 + 32{,}5)$$

Отсюда

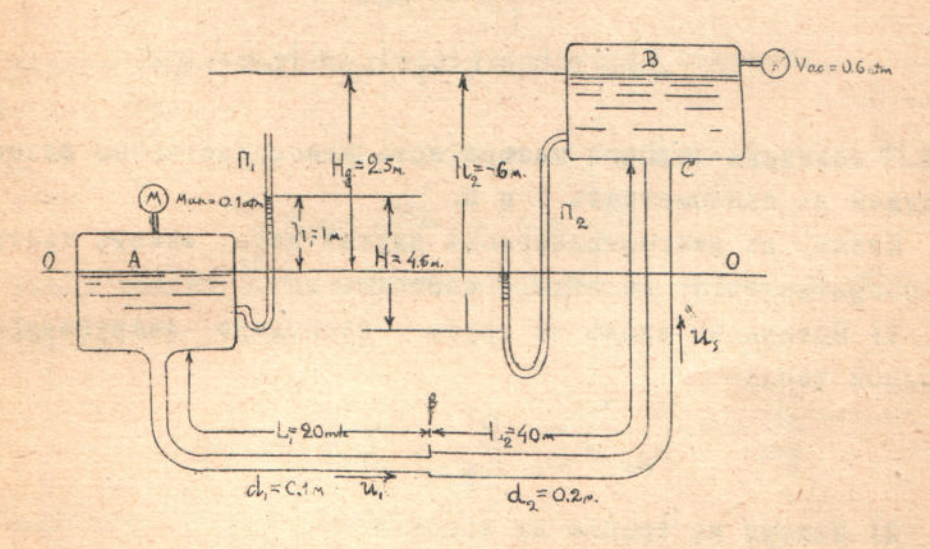
$$u = \sqrt{\frac{2g \cdot 10}{33{,}5}} = 2{,}42\ ^{м}/_{с}$$

Расходъ

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} 2.42 = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} \cdot 2{,}42 = 0{,}019\ ^{м^3}/_{с}$$

Кинетическая энергія въ единицѣ вѣса вытекающей изъ трубы воды $\frac{u^2}{2g}$, согласно ур-нію она составляетъ лишь $\frac{1}{\zeta + 1} = \frac{1}{33{,}5}$ часть начальной энергіи, заключающейся въ единицѣ вѣса воды въ бакѣ. Остальныя $\frac{\zeta}{\zeta + 1} = \frac{32{,}5}{33{,}5}$ части энергіи разсѣяны на сопротивленіе. На фиг.77 изображено также схематическое измѣненіе пьезометрической высоты вдоль потока.

Фиг. 79.



II. Въ качествѣ второго примѣра разсмотримъ слѣдующій.

Вода изъ закрытаго сосуда A по системѣ трубъ переходитъ въ выше лежащій сосудъ B. Геометрическая разность уровней $H_g = 2{,}5$ м. Въ сосудѣ A надъ свободной поверхностью жидкости поддерживается постоянное манометрическое давленіе равное 0,1 атм. (измѣряемое въ пьезометрѣ n_1 высотою столба $h_1 = 1$м.) Въ сосудѣ B поддерживается вакуумъ $p_v = 0{,}6$ атм., измѣряемый

пьезометрической высотой (пьезометръ n_2) - 6 метровъ. Сѣченія сосудовъ велики, такъ что скоростями на свободныхъ поверхностяхъ пренебрегаемъ.

Размѣры и длины трубъ ясны изъ черт. Труба 1 соединяется съ сосудомъ A плавной переходной частью, уменьшающею потери при входѣ до минимума. Въ сѣченіи b - внезапное расширеніе при перемѣнѣ діаметра трубы. Въ C труба непосредственно примыкаетъ къ плоской стѣнкѣ бака.

Составимъ уравненіе Бернулли для сѣченій A и B

За плоскость сравненія примемъ плоскость $O-O$, совпадающую съ свободной поверхностью A; имѣемъ:

$$\frac{p_A}{\gamma} = H_g + \frac{p_B}{\gamma} + \sum h_w ;$$

вычитая изъ обѣихъ частей ур-нія по $\frac{p_a}{\gamma}$, гдѣ p_a атмосферное давленіе получаемъ

$$\frac{p_A - p_a}{\gamma} = H_g - \frac{p_a - p_B}{\gamma} + \sum h_w$$

$$h_1 = H_g - h_2 + \sum h_w$$

$$\sum h_w = h_1 - (H_g - h_2) = H = 4.5 \text{ мт.} \qquad (12)$$

гдѣ H величина полнаго напора есть непосредственно разность уровней въ пьезометрахъ 1 и 2.

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ весь напоръ тратится на сопротивленія; послѣднія состоятъ изъ.

1) Потери на входъ въ трубу; благодаря закругленности входной части

$$h_{w\,вх} = \zeta_1 \frac{U^2}{2g} ; \ \zeta = \backsim 0.05.$$

2) Потери на треніе въ трубѣ 1

$$h_{w\,тр_1} = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{U_1^2}{2g} = \frac{1}{40} \cdot \frac{20}{0,1} \cdot \frac{U_1^2}{2g} = 5 \cdot \frac{U_1^2}{2g}$$

3) Добавочной потери на закругленіе

$$h_{w\,закр} = \zeta_{закр} \frac{U_1^2}{2g}$$, гдѣ ζ около 0·15 - 0·20 *)

---

*) См. II часть.

4) потери на ударъ (по Borda) въ сѣченіи b

$$h_{w\,уд} = \frac{U_2^2}{2g}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-1\right)^2 = \frac{U_2^2}{2g}(4-1)^2 \; 9\,\frac{U_2^2}{2g};$$

5) потери на треніе во второй трубѣ (по Darcy)

$$h_{w\,тр_2} = 0'023\,\frac{40}{0'2}\cdot\frac{U_2^2}{2g} = 4.6\times\frac{U_2^2}{2g};$$

6) потери на закругленіе во второй трубѣ

$$h_{w\,закр} = \zeta_{закр}\,\frac{U_2^2}{2g}$$

7) потери на выходѣ изъ второй трубы въ бакъ B

По теоремѣ Борда непосредственно имѣемъ

$$h_{w\,вых} = \frac{(U_2-U_B)^2}{2g},$$

гдѣ U_B скорость воды въ бакѣ. Такъ какъ послѣдняя равна нулю, то потеря

$$h_{w\,вых} = \frac{U_2^2}{2g}$$

т.е. теряется вся энергія, соотвѣтствующая скорости.

Такимъ образомъ

$$\sum h_w = \frac{U_1^2}{2g}(0{,}05+5+0{,}2) + \frac{U_2^2}{2g}(9+4{,}6+0{,}2+1) = $$
$$= 5{,}25\,\frac{U_1^2}{2g} + 14{,}8\,\frac{U_2^2}{2g}.$$

Относя все къ U_2, имѣемъ, принимая во вниманіе, что $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 4$

$$\sum h_w = 5{,}25\,\frac{U_2^2}{2g}16 + 14{,}8\,\frac{U_2^2}{2g} = \backsim 99\,\frac{U_2^2}{2g}.$$

Подставляя въ (a) имѣемъ

$$H = 4.5\text{ м.} = 99\,\frac{U_2^2}{2g} \quad ; \quad U_2 = \sqrt{2g\,\frac{4.5}{99}} = \backsim 0{,}93\text{ м/с}.$$

III. Опредѣлимъ еще вакуумъ во всасывающей трубѣ насоса (фиг.80) въ точкѣ A при слѣдующихъ данныхъ:

Полная длина трубы L = 20 метр.; діаметръ d = 20 стм.

Q = 60 литр./сек.; $h_н$ = 4,5 м.

Труба снабжена предохранительной сѣткой C и обратнымъ клапаномъ; общее сопротивленіе ихъ оцѣниваемъ коэффиціентомъ $\zeta = 5$.

Предполагая, что движеніе установившееся (центробѣжный насосъ), примѣняемъ уравненіе Бернулли къ сѣченіямъ O—O (поверхность воды въ колодцѣ); пренебрегая скоростью въ O—O и называя давленіе въ A — P_x, напишемъ

$$\frac{p_a}{\gamma} = h_н + \frac{P_x}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + \sum h_w$$

Такимъ образомъ искомый вакуумъ

$$Vac = \frac{p_a - P_x}{\gamma} = h_н + \frac{U^2}{2g} + \zeta_c \frac{U^2}{2g}.$$

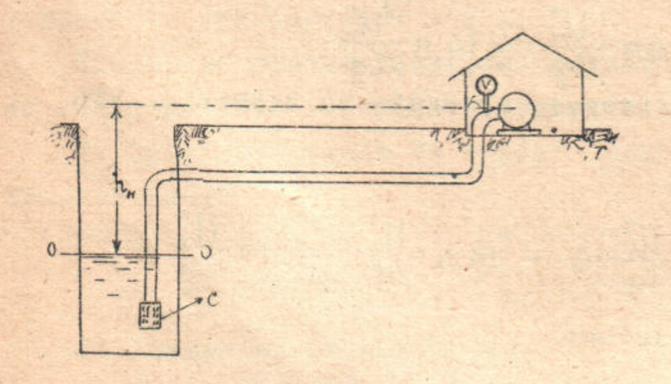
Оцѣнивая сопротивленія въ трехъ колѣнахъ величиной $\zeta = 3 \times 0.2 = 0.6$ и беря $\lambda = \frac{1}{30}$ имѣемъ

$$\zeta_c = 5 + \frac{1}{30} \cdot \frac{20}{0.2} + 0.6 = 8.93 = \backsim 9,$$

$$U = \frac{0,0600}{0,0314} = 1,91 \text{ м/с}; \quad \frac{U^2}{2g} = 0,19 \text{ м}.$$

$$Vac = 4.5 + 0.19 \times 10 = 6.4 \text{ м}.$$

Фиг. 80.



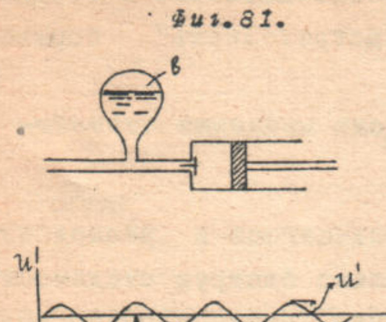
Вакуумъ быстро увеличивается съ расходомъ. Такъ, напримѣръ, если бы Q было равно 90 литр/с., скорость сдѣлалась бы равной $\backsim 2,9$ и $\frac{U^2}{2g} = 0,42$.

Вакуумъ былъ бы равенъ $4,5 + 4,2 = 8,7$; очевидно, такая степень разрѣженія практически была бы недопустима и насосъ работалъ бы неудовлетворительно.

Примѣръ этотъ ясно обнаруживаетъ вліяніе на вакуумъ сопротивленій во всасывающей трубѣ и ясно указываетъ, насколько необходимы соотвѣтственные подсчеты при установкѣ насосовъ.

Предположимъ теперь, что вмѣсто центробѣжнаго установленъ насосъ поршневой, дѣлающій $n = 120$ оборотовъ въ минуту. Благодаря этому движеніе въ трубѣ будетъ неустановившимся, перемѣннымъ. Колебанія скорости воды въ трубѣ смягчаются присутствіемъ воздушнаго колпака b, но полнаго уничтоженія колебаній скорости, очевидно, нѣтъ.

Фиг. 81.



Предположимъ для простоты, что скорость воды въ трубѣ слѣдуетъ соотношенію:

$$U = U_0(1 + \zeta \sin\omega t),$$

гдѣ $\zeta U_0 = U'$ есть наибольшее отклоненіе скорости отъ средней.

Примѣнимъ къ движенію въ трубѣ ур-ніе неустановившагося движенія (26); очевидно, имѣемъ:

$$\frac{p_a - p_x}{\gamma} = Vac = h_n + \frac{U^2}{2g} + \zeta\frac{U^2}{2g} + \frac{1}{g}\frac{dQ}{dt}\int_0^A \frac{ds}{\omega}$$

$$\int_0^A \frac{ds}{\omega} = \frac{L}{\omega} \quad \text{и} \quad Vac = h_n + \frac{U^2}{2g} + \zeta\frac{U^2}{2g} + \frac{L}{g}\cdot\frac{dU}{dt}.$$

Опредѣлимъ наибольшую величину $\frac{L}{g}\cdot\frac{dU}{dt}$, т.е. наибольшее увеличеніе вакуума отъ перемѣннаго движенія.

Имѣемъ:

$$\frac{dU}{dt} = \zeta U_0 \omega\cos\omega t\ ; \qquad \text{наиб. величина } \frac{L}{g}\cdot\frac{dU}{dt} = \frac{L}{g}\zeta U_0\omega;$$

При $n = 120$ об/м; $\omega = 4\pi$; принимая $\zeta = 0.1$, получаемъ

$$\frac{L}{g}\zeta U_0\omega = \frac{20}{9.81}\cdot 0{,}1\cdot 1{,}91\cdot 4\pi = 4.9 \text{ mtr.}$$

Такимъ образомъ наибольшій вакуумъ, если считать сопротивленія въ перемѣнномъ движеніи одинаковыми съ установившимися, получается равнымъ:

$$6{,}4 + 4{,}9 = 11{,}3 \text{ м.}$$

Какъ видимъ даже въ случаѣ не слишкомъ быстроходнаго насоса и съ сильно смягченными воздушнымъ колпакомъ колебаніями получаются разрывы непрерывности.

Этимъ и объясняются сопровождаемые сильными сотрясеніями "удары", наблюдаемые при работѣ поршневыхъ насосовъ и трудности, встрѣчаемыя при проектированіи "быстроходныхъ" поршневыхъ насосовъ.

39. *Сопротивленія въ неравномѣрномъ медленно измѣняющемся движеній.*

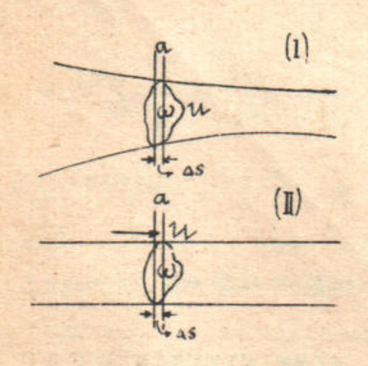
Въ разсмотрѣнныхъ выше случаяхъ сходящагося и расходящагося потоковъ мы предполагали сравнительно быструю сходимость и расходимость; обратимся теперь къ случаю неравномѣрнаго медленно измѣняющагося движенія, въ которомъ сходимость или расходимость потока ничтожны.

При учетѣ сопротивленія въ такомъ движеніи (въ неравномѣрномъ и неустановившемся) обычно сравниваютъ потери напора съ тѣми, которыя имѣли бы мѣсто при той же конфигураціи потока въ установившемся и равномѣрномъ движеніи; другими словами величину потери напора

$$\Delta h_w = \frac{dh_w}{ds}\Delta S = -\frac{dE}{ds}\Delta S$$

на промежуткѣ ΔS, соотвѣтствующемъ сѣченію площади ω, сравниваютъ съ потерею $\Delta h_{w(n)}$, которая имѣла бы мѣсто на томъ же промежуткѣ ΔS въ установившемся движеніи по цилиндрической трубѣ (ф.82 II) того же сѣченія ω.

Фиг. 82.



Соотвѣтствующія потери въ равномѣрномъ установившемся движеніи будемъ называть "нормальными".

Легко показать, что какъ въ неустановившемся, такъ и въ неравномѣрномъ движеніи потери будутъ больше "нормальныхъ" - въ случаѣ ускореннаго движенія и меньше въ случаѣ замедленнаго.

Начнемъ съ неравномѣрнаго движенія.

Разсмотримъ два смежныхъ сѣ-

ченія a и b потока, находящагося въ установившемся неравномѣрномъ движеніи. Пусть при этомъ движеніе удовлетворяетъ условіямъ медленной измѣняемости. Если пренебречь сопротивленіями, и назвать Δy разность пьезометрическихъ высотъ, то для *каждой* струйки имѣемъ:

$$\Delta\left(\frac{u^2}{2g}\right) = \Delta y$$

или

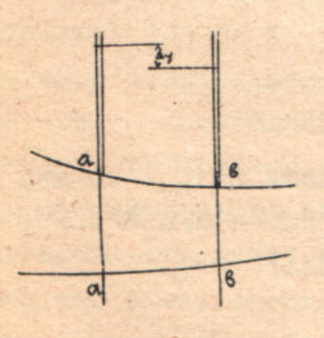
$$\Delta y = \frac{u\Delta u}{g}$$

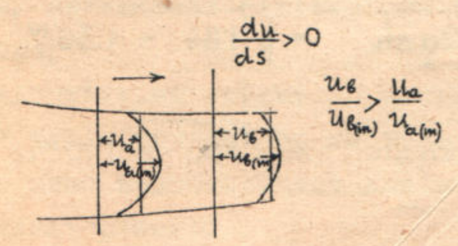
Откуда

$$\Delta u = \frac{\Delta y \cdot g}{u}$$

Такимъ образомъ оказывается, что абсолютное измѣненіе скорости струйки обратно пропорціонально величинѣ скорости струйки. Ясно, что наибольшему измѣненію будутъ подвергаться, вообще говоря, меньшія скорости; такимъ образомъ, въ случаѣ ускореннаго движенія $\left[\frac{du}{ds} > 0\right]$ скорости у стѣнокъ будутъ возрастать на большую величину, чѣмъ скорости въ центрѣ сѣченія. Слѣдовательно скорости вообще стремятся выравняться (отношеніе $\frac{U}{U_{max}} = \frac{\text{средн. скорость}}{\text{наибольш. скор.}}$) будетъ возрастать (фиг. 83).

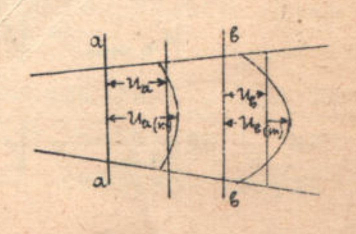
Фиг. 83.





Въ замедленномъ движеніи получится обратная картина; скорости у стѣнокъ, какъ, вообще говоря, меньшія подвергнутся наибольшему искаженію и неравномѣрность распре-

Фиг. 84.



дѣленія скоростей по сѣченію увеличится.

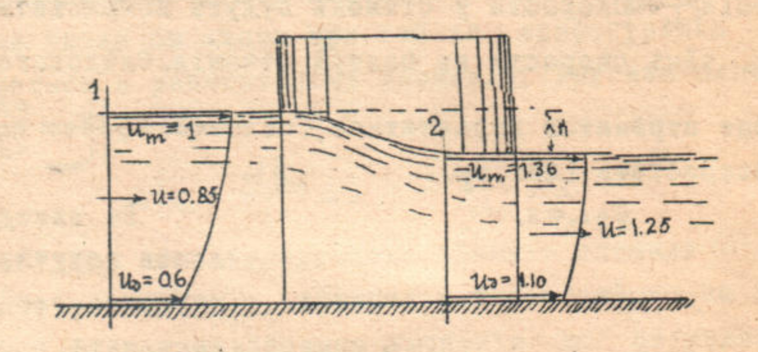
Итакъ, при неравномѣрномъ движеніи всегда имѣетъ мѣсто перераспредѣленіе скоростей по сравненію съ равномѣрнымъ.

Особенно замѣтно такое перераспредѣленіе при сравнительно рѣзкихъ измѣненіяхъ потока. Разсмотримъ, напримѣръ, перераспредѣленіе скоростей при стѣсненіи рѣки искусственными сооруженіями, быками мостовъ, плотинами и пр. Тутъ мы можемъ встрѣтиться съ крайне сильнымъ увеличеніемъ донной скорости.

Для примѣра предположимъ, что русло рѣки стѣснено искусственными сооруженіями настолько, что средняя скорость увеличивается съ 0,85 м/с, до 1,25 м/с. (въ сѣченіяхъ 1 и 2 фиг. 85). Пренебрегая сопротивленіями, вычисляемъ паденіе

$$\Delta h = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{(1{\cdot}25)^2 - (0{\cdot}85)^2}{2g} = 0{\cdot}043 \text{ mtr.}$$

Фиг. 85.



Если скорости $u_{1\,max}$ на поверхности и $u_{1д}$ по дну въ сѣченіи 1 были соотвѣтственно равны 1 м/с. и 0,6 м/с., то въ суженномъ сѣченіи онѣ достигнутъ величинъ:

$$u_{2\,max} = \sqrt{u_{1\,max}^2 + 2g\Delta h} = \sqrt{1{\cdot}84} = 1{\cdot}36 \text{ м/с.}$$

$$u_{2\,дн.} = \sqrt{u_{1д.}^2 + 2g\Delta h} = \sqrt{1{\cdot}20} = 1{\cdot}10 \text{ м/с.}$$

что составитъ увеличеніе скоростей соотвѣтственно на 36%

и на 83,5% при увеличенiи средней скорости на 47%.

Этотъ примѣръ наглядно показываетъ, насколько близоруко при расчетѣ различныхъ искусственныхъ сооруженiй считаться лишь съ измѣненiемъ среднихъ скоростей и основываться на данныхъ, получаемыхъ изъ опытовъ съ равномѣрнымъ движенiемъ.

Ясно, напримѣръ, что при суженiи русла донная скорость растетъ быстрѣе средней, а вѣдь именно величиной донной скорости обусловливается преимущественно размывъ дна.

Очевидно, что при замедленномъ движенiи будетъ имѣть мѣсто обратное явленiе; большее, противъ средней, уменьшенiе донной скорости будетъ создавать болѣе благопрiятныя, чѣмъ при равномѣрномъ движенiи съ тою же средней скоростью, условiя для отложенiя наноса.

Выше мы показали, что сопротивленiя отъ тренiя обусловливаются прежде всего величиной донной скорости. Такимъ образомъ надо, въ согласiи съ изложеннымъ выше, ожидать, что въ ускоренномъ движенiи сопротивленiя будутъ больше, въ замедленномъ меньше нормальныхъ.

Если подобнымъ образомъ легко учесть качественное влiянiе неравномѣрности движенiя на величину сопротивленiя, то количественно это представляется въ высшей степени труднымъ.

Во первыхъ, вызываемому неравномѣрностью движенiя перераспредѣленiю скоростей противодѣйствуютъ силы тренiя, стремящiяся въ общемъ вернуть движенiе къ нормальному виду; кромѣ того, не надо упускать изъ виду, что сопротивленiя обусловливаются общей степенью безпорядочности движенiя, а, какъ мы выше видѣли, увеличенiю послѣдней чрезвычайно благопрiятствуетъ расходимость стѣнокъ - и наоборотъ. Эти общiя причины действуютъ такимъ образомъ въ направленiи обратномъ влiянiю перераспредѣленiя скоростей и т. д.

Ясно, что здѣсь, вообще говоря, имѣетъ мѣсто очень сложное явленiе, являющееся слѣдствiемъ взаимодѣйствiя цѣлаго ряда факторовъ.

Между тѣмъ, мы имѣемъ до настоящаго времени лишь самое ничтожное число опытовъ въ интересующемъ насъ направленiи, - матерiалъ явно недостаточный для возможности сколько нибудь конкретныхъ рѣшенiй.

Большею частью поэтому приходится довольствоваться тѣмъ,

что въ медленно измѣняющемся движенiи считать сопротивленiя одинаковыми съ нормальными.

40. Случай неустановившагося движенiя.

Разсмотримъ отсѣкъ AB жидкости, находящейся въ цилиндрической трубѣ въ установившемся равномѣрномъ движенiи, которому соотвѣтствуетъ нормальное распредѣленiе скоростей по сѣченiю (bb). Потеря напора на нормальное сопротивленiе длины Δs при этомъ равна Δh_w.

Пусть теперь находящейся въ трубѣ жидкости сообщено нѣкоторое ускоренiе $\frac{\partial u}{\partial t}$. Благодаря этому, согласно уравненiю (26) долженъ будетъ увеличиватся пьезометрическiй уклонъ вдоль трубы; разность давленiй въ сѣченiяхъ A и B будетъ теперь для каждой струйки

$$\Delta h = \Delta h_w + \Delta h_i = \Delta h_w + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \Delta s$$

Измѣненiе скорости каждой струйки въ теченiе элемента времени Δt

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = \frac{\Delta h_i}{\Delta s} g \Delta t = i \cdot g \cdot \Delta t;$$

Такимъ образомъ, измѣненiе скоростей всѣхъ струекъ одинаково; кривая скоростей просто передвинется вправо въ положенiе $b'b'$ при положительн. Δu т.е. при ускоренномъ по времени движенiи или влѣво въ положенiе $b''b''$ при отрицательномъ $\Delta u'$ т.е. при замедленномъ движенiи.

Фиг. 36.

Слѣдовательно, въ неустановившемся, перемѣнномъ по времени движенiи скорости "выравниваются" при ускоренномъ движенiи; и обратно, въ замедленномъ движенiи неодинаковость скоростей относительно увеличивается.

Въ согласiи со сказаннымъ

въ предыдущемъ параграфѣ мы имѣемъ въ первомъ случаѣ увеличеніе, во второмъ- уменьшеніе сопротивленій противъ нормальныхъ.

Однако, подобно тому, какъ и въ неравномѣрномъ движеніи, количественный учетъ этихъ измѣненій большею частью представляется пока невозможнымъ. Если движеніе измѣняется по времени очень медленно, можно и въ случаѣ перемѣннаго движенія считать сопротивленія одинаковыми съ нормальными. Оказывается также возможнымъ оцѣнить, хотя бы приблизительно, потери въ случаѣ быстрыхъ колебаній въ трубѣ *).

---

*). *См. Введеніе въ изученіе неустановившагося движенія (изд. 1913 г.).*

